University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Le U-Lagrangien d'une fonction convexe non différentiable.

Pochon, Valérie

Award date:
1997

FACULTES UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

LE $\mathcal{U}$-LAGRANGIEN D'UNE FONCTION CONVEXE NON DIFFÉRENTIABLE

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathématiques
par

Promoteur : J.-J. Strodiot

Valérie POCHON

Année académique : 1996-1997

Je tiens à remercier Monsieur J.-J. STRODIOT *pour sa disponibilité et l'aide précieuse qu'il m'a apportée pour la réalisation de ce mémoire.*

Un merci tout spécial également à mes parents pour leur présence et leur soutien tout au long de ces quatre ans.

Résumé

Étant donné un point $\overline{p}$ de non différentiabilité d'une fonction convexe f , on considère le sous-espace $\mathcal{U}$ le long duquel $f(\overline{p}+\ \bullet)$ est différentiable en 0 . On se propose alors de restreindre à $\overline{p}+\mathcal{U}$ l'étude du comportement au second ordre de f . Dans ce but, on définit $L_{\mathcal{U}}$, le $\mathcal{U}$-Lagrangien de f . Cette fonction, convexe et différentiable en 0 , coïncide jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p}+\mathcal{U}$. Elle constitue dès lors un bon candidat pour la description du comportement de f au second ordre dans $\overline{p}+\mathcal{U}$. Dans le cas particulier d'une fonction de pénalité exacte, on montre que le $\mathcal{U}$-Lagrangien coïncide jusqu'au second ordre avec le Lagrangien ordinaire. On applique ensuite la théorie développée pour construire un algorithme conceptuel de minimisation de f , convergeant superlinéairement. Finalement, on établit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du Hessien de $L_{\mathcal{U}}$ en 0 en termes de régularisée de Moreau-Yosida.

Abstract

Given a nondifferentiability point $\overline{p}$ of a convex function f , we define $\mathcal{U}$ as the subspace along which $f(\overline{p}+\ \bullet)$ is differentiable at 0 . We will then restrict to $\overline{p}+\mathcal{U}$ the study of the second order behaviour of f . To this end, we define $L_{\mathcal{U}}$, the $\mathcal{U}$-Lagrangian of f . This function, convex and differentiable at 0 , coincides up to the first order with the restriction to $\overline{p}+\mathcal{U}$ of f . $L_{\mathcal{U}}$ is therefore an adequate candidate for a second order description of f along $\overline{p}+\mathcal{U}$. In the particular case of an exact penalty function, we show that $L_{\mathcal{U}}$ coincides, up to the second order, with the ordinary Lagrangian. We then apply the developed theory to design a superlinearly convergent conceptual algorithm for minimizing f . Finally we establish a necessary and sufficient condition for the existence of the Hessian of $L_{\mathcal{U}}$ at 0 , in terms of the Moreau-Yosida regularization.

V. Pochon p. 1

ERRATA

- Page 14

  Dans la succession d'égalités et d'inégalités, le dernier signe d'égalité doit être remplacé par $\leq$.

- Page 35

  Dans l'équation (3.2), lire

$$\bar{g} + (B(0,\eta) \cap \operatorname{aff}(\partial f(\bar{p}))) \subseteq \partial f(\bar{p}).$$

- Page 39

  À la première ligne, lire $d \in N_{\partial f(\bar{p})}(g^0)$.

- Page 61

  Après la preuve, lire Proposition 4.7 et non 4.7(iv).

- Page 79

  Dans l'équation suivant (5.17), lire

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) \subseteq \nabla L_{\mathcal{U}}(0) + H_{\mathcal{U}} f(\bar{p})u + B_{\mathcal{U}}(0, o(\|u\|_{\mathcal{U}})).$$

V. Pochon p.2

ERRATA

- Page 81

Dans le Pas en $\mathcal{U}$ de l'algorithme:
pour cet algorithme, on travaille avec $\bar{g} = (0,0)$ et dès lors, par (4.5), $L_{\mathcal{U}}(u) = \frac{1}{4}u^2$ et donc $H_{\mathcal{U}}f(0,0) = \frac{1}{2}$.
Le reste est inchangé.

- Page 83

À nouveau, dans le Pas en $\mathcal{U}$, on a $H_{\mathcal{U}}f(0,0) = \frac{1}{2}$ et donc δu est solution de

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\delta u = 0,$$

càd

$$\delta u = \frac{-1}{2}.$$

Dès lors, $p^+ = (0, \frac{-1}{16})$.
Par conséquent, pour la deuxième itération page 84, δv est solution de

$$\min_{\delta v \in I\!R} f((0, \frac{-1}{16}) + (0, \delta v))$$

$$\Longleftrightarrow \min_{\delta v \in I\!R} |\frac{1}{16} - \delta v|,$$

càd

$$\delta v = \frac{1}{16}$$

et nous obtenons

$$p' = (0, \frac{-1}{16}) + (0, \frac{1}{16}) = (0,0).$$

Le minimum est donc directement atteint en deux itérations.

Introduction

Lorsqu'on essaie de généraliser le développement de Taylor classique d'une fonction convexe f en un point $\overline{p}$ de non différentiabilité, la difficulté majeure se situe dans la non linéarité de l'approximation du premier ordre. En effet, il ne faut plus considérer

$$\frac{f(\overline{p}+h)-f(\overline{p})-\nabla f(\overline{p})^T h}{\|h\|^2},$$

mais bien

$$\frac{f(\overline{p}+h)-f(\overline{p})-f'(\overline{p};h)}{\|h\|^2},$$

où la dérivée directionnelle $f'(\overline{p};\bullet)$ n'est pas linéaire mais simplement sous-linéaire.

Autrement dit, le vecteur gradient $\nabla f(\overline{p})$ se transforme en un ensemble $\partial f(\overline{p})$, le sous-différentiel de f en $\overline{p}$, et il s'agit d'évaluer

$$\frac{\partial f(\overline{p}+h)-\partial f(\overline{p})}{\|h\|} \tag{0.1}$$

qui est une différence entre deux ensembles. Tout le problème réside dans l'interprétation du signe moins de l'expression ci-dessus.

Or, nous savons que f est différentiable en $\overline{p}$ si et seulement si $f'(\overline{p};\bullet)$ est linéaire. Considérons dès lors le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ dans lequel la dérivée directionnelle $f'(\overline{p};\bullet)$ est linéaire. Si nous nous limitons à l'étude du comportement au second ordre de f le long de $\overline{p}+\mathcal{U}$, les choses se simplifient quelque peu.

Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle fonction, $L_{\mathcal{U}}$, appelée $\mathcal{U}$-Lagrangien de f . Elle est convexe et différentiable à l'origine; de plus, elle coïncide jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p}+\mathcal{U}$. Par conséquent, $L_{\mathcal{U}}$ est un bon candidat pour une description du comportement au second ordre de f . Ainsi, nous dirons par exemple que f admet un $\mathcal{U}$-Hessien en $\overline{p}$ si $L_{\mathcal{U}}$ admet un Hessien en zéro.

Nous étudierons ensuite le cas particulier d'une fonction de pénalité exacte et nous verrons que le $\mathcal{U}$-Lagrangien coïncide alors jusqu'au second ordre au moins avec le Lagrangien ordinaire, ce qui lui vaut cette appellation.

Revenant à une fonction convexe quelconque, nous utiliserons la $\mathcal{U}$-théorie pour construire un algorithme conceptuel de minimisation qui convergera superlinéairement.

Finalement, nous chercherons à relier nos $\mathcal{U}$-objets à la régularisée de Moreau-Yosida en donnant notamment une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du $\mathcal{U}$-Hessien de f en termes de régularisée de Moreau-Yosida.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques éléments d'analyse convexe

1.1.1 Conjuguée convexe d'une fonction

Définitions 1.1

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- L'**épigraphe** de f , noté épi(f) , est l'ensemble défini par :

$$\text{épi}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} .$$

- Le **domaine** de f , noté dom(f) , est l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\} .$$

- La **fonction** f est dite **convexe** si son épigraphe est un ensemble convexe.

- La **fonction** f est dite **fermée** si son épigraphe est un ensemble fermé.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, non identique à $+\infty$ et minorée par une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$.

- La **conjuguée convexe** ou **transformée de Fenchel** de f , notée f^* , est la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} , \\ & y & \rightsquigarrow & \sup\limits_{x \in \text{dom}(f)} \{\langle y, x \rangle - f(x)\} . \end{array}$$

  Elle est convexe et fermée.

Découlant directement de cette dernière définition, nous avons l'**inégalité de Young-Fenchel** :

$$\langle y, x\rangle \leq f(x) + f^*(y) \ , \qquad \forall\ x, y \in I\!R^n \ . \tag{1.1}$$

Nous citons ci-dessous, sans les démontrer, quelques propriétés de la conjuguée convexe; le lecteur pourra se référer à la Proposition X 1.3.1 dans [2] pour les démonstrations.

Proposition 1.2

Soient f, f_1, f_2 des fonctions convexes, non identiques à $+\infty$ et minorées par une fonction affine sur $I\!R^n$.
Alors,

(i) *pour* $x_0 \in I\!R^n$,

$$g(x) \equiv f(x + x_0) \ , \ \forall\ x \in I\!R^n \quad \Rightarrow \quad g^*(y) = f^*(y) - \langle y, x_0\rangle \ , \ \forall\ y \in I\!R^n \ ;$$

(ii) *pour* $\alpha \in I\!R$,

$$g(x) \equiv f(x) + \alpha \ , \ \forall\ x \in I\!R^n \quad \Rightarrow \quad g^*(y) = f^*(y) - \alpha \ , \ \forall\ y \in I\!R^n \ ;$$

(iii) *pour* $\alpha \in I\!R \ , \ \alpha \neq 0$,

$$g(x) \equiv f(\alpha x) \ , \ \forall\ x \in I\!R^n \quad \Rightarrow \quad g^*(y) = f^*\left(\tfrac{y}{\alpha}\right) \ , \ \forall\ y \in I\!R^n \ ;$$

(iv) *pour* $\alpha \in I\!R \ , \ \alpha > 0$,

$$g(x) \equiv \alpha f(x) \ , \ \forall\ x \in I\!R^n \quad \Rightarrow \quad g^*(y) = \alpha\ f^*\left(\tfrac{y}{\alpha}\right) \ , \ \forall\ y \in I\!R^n \ ;$$

(v) $f_1(x) \leq f_2(x) \ , \ \forall\ x \in I\!R^n \quad \Rightarrow \quad f_1^*(y) \geq f_2^*(y) \ , \ \forall\ y \in I\!R^n$.

Définitions 1.3

Soit $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe.
Considérons $\mathcal{A}(f)$, la famille de toutes les fonctions affines F sur $I\!R^n$ telles que $F(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in I\!R^n$.

La **fermeture** de f , notée $\overline{f}$, est la fonction définie comme suit :

$$\overline{f}(x) := \sup_{F \in \mathcal{A}(f)} F(x) \ , \qquad \forall\ x \in I\!R^n \ .$$

Afin de pouvoir calculer la conjuguée de la somme de deux fonctions, nous définissons l'**inf-convolution** qui, à deux fonctions convexes f_1 et f_2 définies sur $I\!R^n$, associe

$$(f_1 \underset{\vee}{+} f_2)(x) := \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\} \ . \tag{1.2}$$

Nous avons alors le théorème suivant (Théorème X 2.3.1 dans [2]) :

Théorème 1.4

> *Soient* f_1 *et* f_2 *des fonctions convexes et fermées sur* $\mathbb{R}^n$, *telles que* $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2) \neq \emptyset$.
> *La conjuguée* $(f_1 + f_2)^*$ *de leur somme est la fermeture de la fonction convexe* $f_1^* \underset{\vee}{+} f_2^*$.

Calculons ici la conjuguée convexe de deux fonctions qui interviendront à maintes reprises dans la suite.

a) Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

On appelle **fonction indicatrice** de C , et on note I_C , la fonction définie par

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \, , \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa conjuguée convexe est, par définition,

$$I_C^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle - I_C(x)\} = \sup_{x \in C} \langle y, x \rangle \tag{1.3}$$

qui est appelée **fonction d'appui** de C .

b) Soit $f(x) = \frac{1}{2} \, \|x\|^2$.

Sa conjuguée convexe est, par définition,

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle - \tfrac{1}{2} \, \|x\|^2\} = \langle y, y \rangle - \tfrac{1}{2} \, \|y\|^2 = \tfrac{1}{2} \, \|y\|^2 \, . \tag{1.4}$$

1.1.2 Dérivée directionnelle et sous-différentiel

Définitions 1.5

Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, un point $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ et un vecteur non nul $d \in \mathbb{R}^n$.

- La **dérivée directionnelle de** f **au point** x_0 **dans la direction** d est la fonction notée $f'(x_0; d)$ et définie par

$$f'(x_0; d) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0 + t\ d) - f(x_0)}{t}$$

  lorsque cette limite existe.

  Dans le cas où f est convexe, $f'(x_0; d)$ existe pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ et vaut

$$\inf_{t>0} \frac{f(x_0 + t\ d) - f(x_0)}{t} .$$

- Un **sous-gradient de** f **en** x_0 est un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle y, x - x_0 \rangle , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n . \tag{1.5}$$

- L'ensemble des sous-gradients de f en x_0 est appelé le **sous-différentiel de** f **en** x_0 et noté $\partial f(x_0)$.

  Il est convexe et fermé; il est aussi non vide si x_0 se trouve dans l'**intérieur relatif** de $\mathrm{dom}(f)$, noté $\mathrm{ri}\, \mathrm{dom}(f)$, c'est-à-dire si

$$\exists\, \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad x_0 + (B(0, \eta) \cap \mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))) \subseteq \mathrm{dom}(f)$$

  où $\mathrm{aff}(\mathrm{dom}(f))$ désigne l'enveloppe affine de $\mathrm{dom}(f)$.

La proposition ci-dessous reprend quelques propriétés du sous-différentiel dont nous aurons besoin dans la suite. Le lecteur peut se reporter aux Théorème VI 2.2.1, Corollaire X 1.4.4, Théorème X 1.4.1 et Remarque I 4.1.6 dans [2] pour les démonstrations.

Proposition 1.6

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe,* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, x *et* $y \in \mathbb{R}^n$. *Alors,*

(i) f *atteint son minimum global sur* $\mathbb{R}^n$ *en* x_0 *si et seulement si* $0 \in \partial f(x_0)$.

(ii) $y \in \partial f(x) \;\Rightarrow\; x \in \partial f^*(y)$,

et, si f *est fermée,*
$x \in \partial f^*(y) \;\Rightarrow\; y \in \partial f(x)$.

(iii) $y \in \partial f(x)$ *si et seulement si* $f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle$.

(iv) La dérivée directionnelle de f *en* x_0 *est la fonction d'appui du sous-différentiel de* f *en* x_0 *, c'est-à-dire*

$$f'(x_0; d) = \max_{y \in \partial f(x_0)} \langle y, d \rangle \; .$$

1.1.3 Sous-additivité, sous-linéarité et linéarité

Définitions 1.7

- Une fonction $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est **sous-additive** si

$$\sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2) \, , \qquad \forall \; (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \; .$$

- Une fonction $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est **sous-linéaire** si elle est convexe et positivement homogène (de degré 1), c'est-à-dire si

$$\sigma(\lambda \, x + (1-\lambda) \, y) \leq \lambda \, \sigma(x) + (1-\lambda) \, \sigma(y) \, , \qquad \forall \; x, y \in \mathbb{R}^n \, , \; \forall \; \lambda \in [0,1] \, ,$$

et

$$\sigma(t \, x) = t \, \sigma(x) \, , \qquad \forall \; x \in \mathbb{R}^n \, , \; \forall \; t > 0 \; .$$

En particulier, nous avons $\sigma(0) = t \, \sigma(0)$ pour tout $t > 0$; ceci implique que $\sigma(0) = 0$ ou $\sigma(0) = +\infty$.

Proposition 1.8

Une fonction $\sigma : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$, non identique à $+\infty$, est sous-linéaire si et seulement si une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

(i) $\sigma(t_1\ x_1 + t_2\ x_2) \leq t_1\ \sigma(x_1) + t_2\ \sigma(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in I\!R^n$ *et* $\forall\ t_1, t_2 > 0$.

(ii) σ *est positivement homogène et sous-additive.*

Preuve :

1. Commençons par montrer que, si σ est sous-linéaire, alors (i) est vérifié.

   Soient $x_1, x_2 \in I\!R^n$ et $t_1, t_2 > 0$.

   Posons $t = t_1 + t_2 > 0$.

   Nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(t_1\ x_1 + t_2\ x_2) &= \sigma\left(t\left[\frac{t_1}{t}\ x_1 + \frac{t_2}{t}\ x_2\right]\right) \\ &= t\ \sigma\left(\frac{t_1}{t}\ x_1 + \frac{t_2}{t}\ x_2\right) \\ &\leq t\left[\frac{t_1}{t}\ \sigma(x_1) + \frac{t_2}{t}\ \sigma(x_2)\right] \\ &= t_1\ \sigma(x_1) + t_2\ \sigma(x_2)\end{aligned}$$

   où nous avons successivement utilisé le caractère positif homogène et la convexité de σ .

2. Montrons ensuite que (i) implique (ii).

   Si σ vérifie (i), elle est évidemment sous-additive (prendre $t_1 = t_2 = 1$) et elle satisfait (en prenant $x_1 = x_2 = x$, $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}\ t$)

$$\sigma(t\ x) \leq t\ \sigma(t)\ , \qquad \forall\ x \in I\!R^n\ ,\ \forall\ t > 0\ .$$

   Cette dernière inégalité permet d'écrire $\sigma(x) = \sigma(t^{-1}\ t\ x) \leq t^{-1}\ \sigma(t\ x)$, c'est-à-dire $t\ \sigma(x) \leq \sigma(t\ x)$. σ est donc positivement homogène.

3. Montrons finalement que, si σ vérifie (ii), alors elle est sous-linéaire. Il suffit en fait de voir que σ est convexe.

Soient donc $t_1, t_2 > 0$ avec $t_1 + t_2 = 1$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \sigma(t_1\, x_1 + t_2\, x_2) &\leq \sigma(t_1\, x_1) + \sigma(t_2\, x_2) \\ &= t_1\, \sigma(x_1) + t_2\, \sigma(x_2) \end{aligned}$$

où nous avons successivement utilisé la sous-additivité et le caractère positif homogène de σ . ∎

Corollaire 1.9

> *Si σ est sous-linéaire,*
>
> *alors, $\sigma(x) + \sigma(-x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve :
En vertu de la Proposition 1.8, p. 12, σ est sous-additive ce qui, avec $x_2 = -x_1 = x$, donne

$$\sigma(x - x) = \sigma(0) \leq \sigma(x) + \sigma(-x) .$$

Or, $\sigma(0)$, valant 0 ou $+\infty$, est positif ou nul; ceci prouve que $\sigma(x) + \sigma(-x) \geq 0$. ∎

Proposition 1.10

> *Soit une fonction σ sous-linéaire et supposons qu'il existe $x_1, \cdots, x_m$ dans* $\mathrm{dom}(\sigma)$ *tels que*
>
> $$\sigma(x_j) + \sigma(-x_j) = 0 , \qquad \forall\, j = 1, \cdots, m .$$
>
> *Alors, σ est linéaire sur* $\mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_m\}$ *, le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \cdots, x_m$.*

Preuve :
Soit $x = \sum_{j=1}^{m} t_j\, x_j$ une combinaison linéaire arbitraire de $x_1, \cdots, x_m$.
Comme $\mathrm{dom}(\sigma)$ est un cône et comme, par hypothèse, chaque x_j et $-x_j$ appartient à $\mathrm{dom}(\sigma)$, nous avons que $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$.
Montrons que $\sigma(x) = \sum_{j=1}^{m} t_j\, \sigma(x_j)$.
Posons

$$\begin{aligned} J_1 &= \{j \in \{1, \cdots, m\} : t_j > 0\} , \\ J_2 &= \{j \in \{1, \cdots, m\} : t_j < 0\} . \end{aligned}$$

Avec la convention que $\sum_{\emptyset} = 0$, nous obtenons

$$\sigma(x) = \sigma\left(\sum_{j \in J_1} t_j\, x_j + \sum_{j \in J_2} (-t_j)\, (-x_j)\right) .$$

Utilisant la Proposition 1.8 (i), p. 12, et l'hypothèse $\sigma(-x_j) = -\sigma(x_j)$, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\leq \sum_{j \in J_1} t_j\, \sigma(x_j) + \sum_{j \in J_2} (-t_j)\, \sigma(-x_j) \\ &= \sum_{j \in J_1} t_j\, \sigma(x_j) + \sum_{j \in J_2} t_j\, \sigma(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} t_j\, \sigma(x_j) \\ &= -\left[\sum_{j \in J_1} t_j\, \sigma(-x_j) + \sum_{j \in J_2} (-t_j)\, \sigma(x_j)\right] \\ &\leq -\sigma\left(-\sum_{j=1}^{m} t_j\, x_j\right) \\ &= -\sigma(-x) \\ &= \sigma(x) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du Corollaire 1.9, p. 13.
Nous venons donc de montrer que

$$\sigma(x) \leq \sum_{j=1}^{m} t_j\, \sigma(x_j) \leq \sigma(x) ,$$

ce qui prouve bien que $\sigma(x) = \sum_{j=1}^{m} t_j \, \sigma(x_j)$. ∎

Définition 1.11

Lorsque $\sigma(0) = 0$, le résultat précédent nous permet de définir

$$\mathcal{U} := \{x \in I\!\!R^n : \sigma(x) + \sigma(-x) = 0\} . \tag{1.6}$$

C'est le plus grand sous-espace vectoriel de $I\!\!R^n$ sur lequel σ est *linéaire.*

1.2 Géométrie d'ensembles convexes

Nous commençons par rappeler les définitions de cône tangent et de cône normal à une partie de $I\!\!R^n$, éventuellement convexe, puis nous donnerons deux propositions caractérisant les cônes convexes qui sont des sous-espaces vectoriels.

Définitions 1.12

Soient une partie S de $I\!\!R^n$ et un point $\overline{x}$ de S .

- Un **vecteur** $h \in I\!\!R^n$ est **tangent** à S en $\overline{x}$ si

  $$\exists\,(h^k)_{k\in I\!N} \,,\; h^k \to h \,,\; \exists\,(t^k)_{k\in I\!N} \,,\; t^k > 0 \,,\; \forall\, k \,,\; t^k \to 0 \quad \text{tels que} \quad \overline{x}+t^k\, h^k \in S \,,\; \forall\, k \,.$$

- Le **cône tangent à** S **en** $\overline{x}$, noté $T_S(\overline{x})$, est l'ensemble des vecteurs tangents à S en $\overline{x}$.

- Le **cône normal à** S **en** $\overline{x}$, noté $N_S(\overline{x})$, est l'ensemble suivant :

  $$N_S(\overline{x}) = \{v \in I\!\!R^n : \langle v, h\rangle \leq 0 \;,\; \forall\, h \in T_S(\overline{x})\} \,.$$

Lorsque S est un ensemble convexe,

- un vecteur $h \neq 0$ est une **direction admissible** pour S à partir de $\overline{x}$ si

  $$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \{\overline{x} + t\, h : 0 \leq t \leq \varepsilon\} \subseteq S \,.$$

- Dans ce cas,

$$T_S(\overline{x}) = \text{la fermeture de l'ensemble des directions admissibles pour } S \text{ à partir de } \overline{x} \tag{1.7}$$

et

$$N_S(\overline{x}) = \{v \in I\!R^n : \langle v, x - \overline{x}\rangle \leq 0 \ , \ \forall\, x \in S\} \ . \tag{1.8}$$

Proposition 1.13

> *Soit $\mathcal{N}$ un cône convexe fermé et soit $\mathcal{M} := \mathcal{N} \cap (-\mathcal{N})$ le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans $\mathcal{N}$.*
> *Alors, $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$.*
> *De plus, pour tout $v_0 \in \mathcal{M}^{\perp}$ et $v \in \mathcal{N}$, nous avons*
>
> $$\langle v_0, v\rangle \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -v \notin \mathcal{N} \ .$$

Preuve :
Pour montrer que $\mathcal{M}$ est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans $\mathcal{N}$, nous renvoyons le lecteur au Théorème 2.7 dans [6].
Lorsque le cône convexe $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel, il est symétrique; dès lors, $\mathcal{N} = -\mathcal{N} = \mathcal{M}$ et, dans ce cas, $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \{0\}$.
Inversement, lorsque $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$, supposons par l'absurde que $\mathcal{N}$ ne soit pas un sous-espace vectoriel. $\mathcal{M}$ étant un sous-espace, nous avons alors $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ et donc nous pouvons prendre $v \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$. Exprimons-le comme une somme directe :

$$v = v_m + v_0 \qquad \text{avec} \quad v_m \in \mathcal{M} \text{ et } v_0 \in \mathcal{M}^{\perp} \ .$$

Remarquons que, puisque $v \notin \mathcal{M}$, $v_0 \neq 0$.
Puisque $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel et $\mathcal{N}$ un cône convexe, nous avons

$$v_0 = v + (-v_m) \in \mathcal{N} + \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} + \mathcal{N} = \mathcal{N} \ .$$

Nous avons donc trouvé un élément non nul, v_0 , qui est à la fois dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}^{\perp}$, ce qui contredit l'hypothèse $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$.
Finalement, prenons $v_0 \in \mathcal{M}^{\perp}$ et $v \in \mathcal{N}$ et supposons par l'absurde que $-v \in \mathcal{N}$. Dans ce cas, $v \in \mathcal{N} \cap (-\mathcal{N}) = \mathcal{M}$ et donc $\langle v, v_0\rangle = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\langle v_0, v\rangle \neq 0$.■

Proposition 1.14

> *Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un ensemble convexe fermé, et g_0 un élément de S .*
> *Alors, $N_S(g_0)$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $g_0 \in \operatorname{ri} S$ où $\operatorname{ri} S$ désigne l'intérieur relatif de S .*

Preuve :
Notons $\sigma_S(s) := \sup_{x \in S} \langle s, x \rangle$ la fonction d'appui de S et montrons d'abord que

$$s \in N_S(g_0) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_S(s) = \langle s, g_0 \rangle \, .$$

Puisque S est convexe, par (1.8), nous avons

$$\begin{aligned} s \in N_S(g_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle s, x - g_0 \rangle \leq 0 \, , \; \forall\, x \in S \, , \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in S} \langle s, x \rangle \leq \langle s, g_0 \rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma_S(s) \leq \langle s, g_0 \rangle \, . \end{aligned}$$

Mais, par définition de σ_S et puisque $g_0 \in S$, nous avons aussi

$$\sigma_S(s) \geq \langle s, g_0 \rangle \, .$$

Dès lors, nous avons bien la caractérisation annoncée.
Puisqu'un cône convexe est un sous-espace vectoriel si et seulement si il est symétrique, nous avons immédiatement que $N_S(g_0)$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$s \in N_S(g_0) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_S(s) + \sigma_S(-s) = 0$$

ou, de façon équivalente,

$$\sigma_S(s) + \sigma_S(-s) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad s \notin N_S(g_0) \, ,$$

c'est-à-dire , en appliquant (1.8),

$$\sigma_S(s) + \sigma_S(-s) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, g_d \in S : \langle d, g_d \rangle > \langle d, g_0 \rangle \, ,$$

ou encore

$$\sigma_S(s) + \sigma_S(-s) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{g_d \in S} \langle d, g_d \rangle = \sigma_S(d) > \langle d, g_0 \rangle \, .$$

Le Théorème 13.1 dans [6] nous assure que cette dernière propriété est elle-même équivalente à $g_0 \in \operatorname{ri} S$, ce qui termine notre démonstration. ∎

Chapitre 2

Développements du premier ordre d'une fonction convexe et de sa conjuguée

2.1 Position du problème

Nous allons ici nous intéresser aux liens existant entre les bornes supérieures d'une fonction convexe et les bornes inférieures de sa conjuguée convexe (définie au point 1.1.1). Cela nous sera en effet particulièrement utile dans le Chapitre 4. Plus précisément, considérons une fonction convexe ϕ et son développement du premier ordre :

$$\phi(z_0 + h) = \phi(z_0) + \phi'(z_0; h) + o(\|h\|)$$

où $z_0, h \in I\!R^n$.

Nous désirons étudier le reste de ce développement.

a) Le borner supérieurement signifie trouver un $\varepsilon > 0$ et une fonction r tels que

$$\phi(z_0 + h) \leq \phi(z_0) + \phi'(z_0; h) + r(h) + I_{B(0,\varepsilon)}(h) , \quad \forall\, h \in I\!R^n . \tag{2.1}$$

b) Le borner inférieurement signifie trouver un $\varepsilon > 0$ et une fonction r tels que

$$\phi(z_0 + h) + I_{B(0,\varepsilon)}(h) \geq \phi(z_0) + \phi'(z_0; h) + r(h) , \quad \forall\, h \in I\!R^n . \tag{2.2}$$

Nous exigerons également que r vérifie les propriétés suivantes :

$$r \text{ convexe, positive ou nulle, différentiable en } 0\ ,\ r(0) = 0 \text{ et } \nabla r(0) = 0\ .$$

La question est donc de savoir si ϕ^* satisfait une des inégalités (2.1) ou (2.2) , sachant que ϕ satisfait l'autre.

Pour y répondre, nous serons amenés à faire une hypothèse supplémentaire sur r :

$$\exists\, c > 0 \quad \text{tel que} \quad r(h) \geq \tfrac{1}{2}\, c\, \|h\|^2\ , \qquad \forall\, h \in I\!R^n\ . \tag{2.3}$$

2.2 La régularisée Lipschitzienne

Définition 2.1

Étant donné une fonction ψ , la **régularisée Lipschitzienne** de sa conjuguée ψ^* , notée Ψ_ε^* , est la fonction définie par :

$$\Psi_\varepsilon^*(g) := (\psi + I_{B(0,\varepsilon)})^*(g)\ . \tag{2.4}$$

En vertu du Théorème 1.4, p. 9, de (1.2) et de (1.3), nous avons

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon^*(g) &= (\psi^* \underset{\vee}{+} I^*_{B(0,\varepsilon)})(g) \\
&= \min_{s \in I\!R^n} \left[\psi^*(g-s) + \sup_{x \in B(0,\varepsilon)} \langle s, x \rangle \right] \\
&= \min_{s \in I\!R^n} \left[\psi^*(g-s) + \varepsilon \sup_{y \in B(0,1)} \langle s, y \rangle \right] \\
&= \min_{s \in I\!R^n} \left[\psi^*(g-s) + \varepsilon\ \|s\| \right]\ .
\end{aligned}$$

Remarquons en particulier que $\Psi_\varepsilon^*(g) \leq \psi^*(g)$ pour tout g .

Une propriété importante de cette fonction Ψ_ε^* est qu'elle coïncide avec ψ^* sur un certain ensemble, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 2.2

Soit ψ une fonction convexe à valeurs finies et soit Ψ_ε^* la régularisée Lipschitzienne de sa conjuguée ψ^* .

(i) S'il existe $c > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\psi(h) \geq \psi(0) + \psi'(0; h) + \tfrac{1}{2}\, c\, \|h\|^2\,, \quad \textit{pour } \|h\| \leq \delta\,, \tag{2.5}$$

alors,

$$\Psi_\varepsilon^*(s) = \psi^*(s)\,, \qquad \forall\, \varepsilon \leq \delta \textit{ et } s \in \partial\psi(0) + B\left(0, \tfrac{\varepsilon c}{2}\right)\,.$$

(ii) Si ψ est de la forme $\psi(h) = \frac{1}{2}\, C\, \|h\|^2$ pour un $C > 0$,

alors,

$$\Psi_\varepsilon^*(z) = \begin{cases} \frac{1}{2C}\, \|z\|^2 & \textit{si } \|z\| \leq \varepsilon\, C\,, \\ \frac{-\varepsilon^2\, C}{2} + \varepsilon\, \|z\| & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Si ψ a la même forme qu'en (ii) et si $\eta \in\,]0, \varepsilon]$,

alors

$$\Psi_\varepsilon^*(z) \geq \frac{-\eta^2\, C}{2} + \eta\, \|z\|\,, \qquad \forall\, z\,.$$

Preuve :

[**(i)**] En appliquant la Proposition XI 3.4.5 dans [2], nous voyons que ψ^* et sa régularisée Ψ_ε^* coïncident sur l'ensemble

$$S = \{s \in I\!R^n : \psi^*(s) = \Psi_\varepsilon^*(s)\} = \{s \in I\!R^n : \partial\psi^*(s) \cap B(0, \varepsilon) \neq \emptyset\}\,.$$

En particulier, S contient $\partial\psi(0)$. En effet, si $s \in \partial\psi(0)$, alors, par la Proposition 1.6 (ii), p. 11, $0 \in \partial\psi^*(s)$. Comme $0 \in B(0, \varepsilon)$ également, nous avons finalement que $s \in S$.

Pour montrer (i), nous devons voir que $\partial\psi^*(s) \cap B(0, \varepsilon)$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe un x dans $\partial\psi^*(s) \cap B(0, \varepsilon)$, ou encore qu'il existe un x tel que $s \in \partial\psi(x)$ et $x \in B(0, \varepsilon)$. En vertu du Théorème 23.5 dans [6], cette dernière propriété est équivalente à ce qu'il existe un x tel que $\langle z, s\rangle - \psi(z)$ atteigne son supremum en $z = x \in B(0, \varepsilon)$, ou encore à ce que $\langle s, \bullet\rangle - \psi(\bullet)$ atteigne son supremum (qui est par définition $\psi^*(s)$) sur $B(0, \varepsilon)$.

Essayons dès lors de borner supérieurement

$$A := \sup_{\|h\|>\varepsilon} \{\langle s, h\rangle - \psi(h)\} .$$

Pour cela, utilisons la convexité de ψ sur $[0, h]$:
si $h \notin B(0, \varepsilon)$ (c'est-à-dire si $0 < \frac{\varepsilon}{\|h\|} < 1$), nous avons

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{\|h\|}\ h + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|h\|}\right)\ 0\right) \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|}\ \psi(h) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|h\|}\right)\ \psi(0) ,$$

c'est-à-dire

$$\psi\left(\frac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right) \leq \psi(0) + \frac{\varepsilon}{\|h\|}\ [\psi(h) - \psi(0)] .$$

Or, par (2.5) et lorsque $\left\|\frac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right\| = \varepsilon \leq \delta$, nous avons

$$\psi\left(\frac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right) \geq \psi(0) + \psi'\left(0; \frac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right) + \tfrac{1}{2}\ c\ \left\|\tfrac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right\|^2 .$$

Des deux dernières inégalités, nous tirons que

$$\psi(0) + \psi'\left(0; \frac{\varepsilon\ h}{\|h\|}\right) + \tfrac{1}{2}\ c\ \varepsilon^2 \leq \psi(0) + \tfrac{\varepsilon}{\|h\|}\ \psi(h) - \tfrac{\varepsilon}{\|h\|}\ \psi(0)$$

ou encore, en multipliant par $\frac{\|h\|}{\varepsilon}$,

$$\psi'(0; h) + \tfrac{1}{2}\ c\ \|h\|\ \varepsilon \leq \psi(h) - \psi(0) ,$$

c'est-à-dire

$$\psi(h) \geq \psi(0) + \psi'(0; h) + \tfrac{1}{2}\ c\ \varepsilon\ \|h\| .$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} A &\leq \sup_{\|h\|>\varepsilon} \{\langle s, h\rangle - \psi(0) - \psi'(0; h) - \tfrac{1}{2}\ c\ \varepsilon\ \|h\|\} \\ &\leq -\psi(0) + \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, h\rangle - \psi'(0; h) - \tfrac{1}{2}\ c\ \varepsilon\ \|h\|\} \\ &= -\psi(0) + \left(\psi'(0; \bullet) + \tfrac{1}{2}\ c\ \varepsilon\ \|\bullet\|\right)^*(s) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la définition de la conjuguée convexe.

Or, en vertu de la Proposition 1.6 (iv), p. 11, et de (1.3), nous avons

$$(\psi'(0; \bullet))^*(s) = I_{\partial\psi(0)}(s) ,$$

et comme

$$\begin{aligned}\left(I_{B\left(0,\frac{\varepsilon c}{2}\right)}\right)^*(s) &= \sup_{x\in B\left(0,\frac{\varepsilon c}{2}\right)} \langle s,x\rangle \\ &= \frac{\varepsilon\ c}{2} \sup_{y\in B(0,1)} \langle s,y\rangle \\ &= \tfrac{\varepsilon\ c}{2}\ \|y\|\ ,\end{aligned}$$

nous pouvons écrire, en fonction du Théorème 1.4, p. 9,

$$A \leq -\psi(0) + \left(I_{\partial\psi(0)} \underset{\vee}{+} I_{B\left(0,\frac{\varepsilon c}{2}\right)}\right)(s)\ .$$

Or, la dernière inf-convolution est nulle lorsque $s \in \partial\psi(0) + B\left(0,\frac{\varepsilon c}{2}\right)$.
Dès lors, pour tout $s \in \partial\psi(0) + B\left(0,\frac{\varepsilon c}{2}\right)$ qui n'est pas dans $\partial\psi(0)$, nous avons

$$A \leq -\psi(0)\ .$$

Mais $-\psi(0) = \inf_{z\in I\!R^n} \psi^*(z)$. En effet, d'une part, par l'inégalité de Young-Fenchel (1.1), nous avons

$$\psi(0) + \psi^*(z) \ \geq\ \langle z,0\rangle\ , \qquad \forall\ z \in I\!R^n\ ,$$

c'est-à-dire

$$\psi^*(z) \ \geq\ -\psi(0)\ , \qquad \forall\ z \in I\!R^n\ ,$$

ou encore

$$\inf_{z\in I\!R^n} \psi^*(z) \ \geq\ -\psi(0)\ .$$

D'autre part, avec $x \in \partial\psi(0)$, c'est-à-dire $0 \in \partial\psi^*(x)$, la Proposition 1.6 (iii), p. 11, nous dit que $\psi^*(x) + \psi(0) = \langle 0,x\rangle = 0$ et donc que $\inf_{z\in I\!R^n} \psi^*(z) \leq -\psi(0)$.
Par ailleurs, puisque $s \notin \partial\psi(0)$, et donc $0 \notin \partial\psi^*(s)$, la Proposition 1.6 (i), p. 11, nous assure que ψ^* n'atteint pas sa borne inférieure en s , c'est-à-dire que

$$\inf_{z\in I\!R^n} \psi^*(z) < \psi^*(s)\ .$$

Nous venons donc d'obtenir

$$A \leq -\psi(0) = \inf_{z\in I\!R^n} \psi^*(z) < \psi^*(s)\ ,$$

ce qui prouve bien que $\langle s,\bullet\rangle - \psi(\bullet)$ atteint son supremum sur $B(0,\varepsilon)$.

[(**ii**)] Calculons la régularisée Lipschitzienne de notre fonction quadratique ψ

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon^*(z) &= \left(\tfrac{1}{2}\, C \,\| \bullet \|^2 + I_{B(0,\varepsilon)}\right)^*(z) \\
&= \sup_{x \in B(0,\varepsilon)} \left\{ \langle z, x \rangle - \tfrac{1}{2}\, C\, \|x\|^2 \right\} \\
&= C \sup_{x \in B(0,\varepsilon)} \left\{ \left\langle \tfrac{z}{C}, x \right\rangle - \tfrac{1}{2}\, \|x\|^2 \right\} .
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{z}{C}, x \right\rangle - \tfrac{1}{2}\, \|x\|^2 &= \tfrac{1}{2} \left\langle \tfrac{z}{C}, \tfrac{z}{C} \right\rangle - \tfrac{1}{2}\, \langle x, x \rangle - \tfrac{1}{2} \left\langle \tfrac{z}{C}, \tfrac{z}{C} \right\rangle + \left\langle x, \tfrac{z}{C} \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \left\| \tfrac{z}{C} \right\|^2 - \tfrac{1}{2} \left\langle x - \tfrac{z}{C}, x - \tfrac{z}{C} \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \left\| \tfrac{z}{C} \right\|^2 - \tfrac{1}{2} \left\| x - \tfrac{z}{C} \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon^*(z) &= C \sup_{x \in B(0,\varepsilon)} \left\{ \tfrac{1}{2} \left\| \tfrac{z}{C} \right\|^2 - \tfrac{1}{2} \left\| x - \tfrac{z}{C} \right\|^2 \right\} \\
&= \tfrac{1}{2\,C}\, \|z\|^2 - \tfrac{C}{2} \inf_{x \in B(0,\varepsilon)} \left\| x - \tfrac{z}{C} \right\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2\,C}\, \|z\|^2 - \tfrac{C}{2}\, d^2_{B(0,\varepsilon)} \left(\tfrac{z}{C} \right)
\end{aligned}$$

où $d_{B(0,\varepsilon)}$ désigne la fonction distance à $B(0,\varepsilon)$, c'est-à-dire

$$d_{B(0,\varepsilon)}(x) = \inf_{y \in B(0,\varepsilon)} \|y - x\| .$$

Envisageons à présent deux cas.

a) Si $\|z\| \le \varepsilon\, C$, c'est-à-dire si $\frac{z}{C} \in B(0,\varepsilon)$,
nous avons $d_{B(0,\varepsilon)}\left(\frac{z}{C}\right) = 0$ et dès lors $\Psi_\varepsilon^*(z) = \frac{1}{2\,C}\, \|z\|^2$.

b) Si $\|z\| > \varepsilon\, C$, c'est-à-dire si $\frac{z}{C} \notin B(0,\varepsilon)$,
nous avons $d_{B(0,\varepsilon)}\left(\frac{z}{C}\right) = \varepsilon - \frac{\|z\|}{C}$ et dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\Psi_\varepsilon^*(z) &= \tfrac{1}{2\,C}\, \|z\|^2 - \tfrac{C}{2} \left(\varepsilon - \tfrac{\|z\|}{C} \right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2\,C}\, \|z\|^2 - \tfrac{C\,\varepsilon^2}{2} + \varepsilon\, \|z\| - \tfrac{\|z\|^2}{2\,C} \\
&= -\tfrac{\varepsilon^2\, C}{2} + \varepsilon\, \|z\| .
\end{aligned}$$

[**(iii)**] Considérons à nouveau deux cas distincts.

a) Si $\|z\| \leq \varepsilon\, C$, nous avons, d'après (ii),

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon^*(z) - \left(-\tfrac{\eta^2\, C}{2} + \eta\, \|z\|\right) &= \tfrac{1}{2\, C}\, \|z\|^2 + \tfrac{\eta^2\, C}{2} - \eta\, \|z\| \\ &= \tfrac{1}{2\, C}\, (\|z\| - \eta\, C)^2 \,. \end{aligned}$$

Le membre de droite de la dernière égalité étant positif ou nul, nous avons bien $\Psi_\varepsilon^*(z) \geq -\frac{\eta^2\, C}{2} + \eta\, \|z\|$.

b) D'autre part, si $\|z\| > \varepsilon\, C$, posons $q(\eta) = -\frac{\eta^2\, C}{2} + \eta\, \|z\|$, de sorte que $q(\varepsilon) = \Psi_\varepsilon^*(z)$.
Calculant $q'(\eta) = -\eta\, C + \|z\|$, nous voyons que q est une fonction croissante lorsque $-\eta\, C + \|z\| \geq 0$.
Dès lors, pour $\eta \leq \varepsilon$ et puisque $\varepsilon < \frac{\|z\|}{C}$, nous avons $q(\eta) \leq q(\varepsilon)$, c'est-à-dire $-\frac{\eta^2\, C}{2} + \eta\, \|z\| \leq \Psi_\varepsilon^*(z)$, ce qui termine notre démonstration. ∎

2.3 Borner la conjuguée inférieurement

Revenons aux développements (2.1) et (2.2). Lorsque la fonction r n'augmente pas trop vite près de l'origine, la condition (2.1) exprime le fait que ϕ ne diffère pas trop de son approximation du premier ordre. Dans ce cas, nous pouvons trouver une borne inférieure sur ϕ^* , comme l'établit le théorème ci-dessous.

Théorème 2.3

Soit ϕ une fonction convexe à valeurs finies, vérifiant (2.1) *en un point z_0 donné; si la fonction r satisfait* (2.3) *ainsi que*

$$r(h) \leq \tfrac{1}{2}\, C\, \|h\|^2\,, \qquad \text{pour un } C > 0 \ \text{ et } \forall\, h\,, \tag{2.6}$$

alors, pour tout $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et pour tout $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\, c^2}{2\, C}\right)$,

$$\phi^*(g_0 + s) \geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \min_{\gamma \in \partial\phi(z_0)} r^*(g_0 + s - \gamma)\,. \tag{2.7}$$

Preuve :
Conjuguons les deux membres de (2.1) en utilisant la Proposition 1.2 (i), (ii) et (v), p. 8 :

$$\begin{aligned} \phi^*(g) - \langle g, z_0 \rangle &\geq [\phi(z_0) + \phi'(z_0; \bullet) + r + I_{B(0,\varepsilon)}]^*(g) \\ &= -\phi(z_0) + [\phi'(z_0; \bullet) + r + I_{B(0,\varepsilon)}]^*(g) \, . \end{aligned}$$

Par ailleurs, par le Théorème 1.4, p. 9, par (2.4) et comme $(\phi'(z_0; \bullet))^* = I_{\partial\phi(z_0)}$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi^*(g) - \langle g, z_0 \rangle &\geq -\phi(z_0) + [I_{\partial\phi(z_0)} \underset{\vee}{+} (r + I_{B(0,\varepsilon)})^*](g) \\ &= -\phi(z_0) + [I_{\partial\phi(z_0)} \underset{\vee}{+} R_\varepsilon^*](g) \\ &= -\phi(z_0) + \min_{\gamma \in \partial\phi(z_0)} R_\varepsilon^*(g - \gamma) \end{aligned} \tag{2.8}$$

où R_ε^* est la régularisée Lipschitzienne de r^* .
Nous allons prouver que, pour g suffisamment près de $\partial\phi(z_0)$, R_ε^* peut être remplacée par r^* dans (2.8).
Tout d'abord, remarquons qu'en vertu de la Proposition 1.2 (v), p. 8, et de (1.4), les inégalités (2.3) et (2.6) se transforment, dans l'espace dual, en

$$\frac{1}{2\,C} \, \| \bullet \|^2 \leq r^*(\bullet) \leq \frac{1}{2\,c} \, \| \bullet \|^2 \, . \tag{2.9}$$

Cette relation implique en particulier que $C \geq c$.
Par le Lemme 2.2 (iii), p. 20, et pour tout $\eta \in \,]0, \varepsilon]$, nous avons

$$R_\varepsilon^*(z) \geq \tfrac{1}{2} \, (-\eta^2 \, C + 2 \, \eta \, \|z\|) \, , \qquad \forall \, z \, .$$

En appliquant (2.9) et par division, nous obtenons alors

$$\frac{r^*(z)}{R_\varepsilon^*(z)} \leq \frac{\frac{1}{2\,c} \, \|z\|^2}{\frac{1}{2} \, (-\eta^2 \, C + 2 \, \eta \, \|z\|)} = \frac{\|z\|^2}{-\eta^2 \, c \, C + 2 \, \eta \, c \, \|z\|} \, , \qquad \forall \, z \, . \tag{2.10}$$

Considérons γ_g , un γ optimal dans (2.8), c'est-à-dire tel que

$$R_\varepsilon^*(g - \gamma_g) \leq R_\varepsilon^*(g - \gamma) \, , \qquad \forall \, \gamma \in \partial\phi(z_0) \, .$$

D'après (2.9) et (2.10), nous avons

$$\frac{1}{2\,C} \, \|g - \gamma_g\|^2 \leq r^*(g - \gamma_g) \leq \frac{\|g - \gamma_g\|^2}{-\eta^2 \, c \, C + 2 \, \eta \, c \, \|g - \gamma_g\|} \, R_\varepsilon^*(g - \gamma_g) \, .$$

Or,

$$R_\varepsilon^*(g-\gamma_g) \le R_\varepsilon^*(g-\gamma) \le r^*(g-\gamma) \le \tfrac{1}{2\,c}\ \|g-\gamma\|^2\ ,$$

et, dès lors,

$$\tfrac{1}{2\,C}\ \|g-\gamma_g\|^2 \le \frac{\|g-\gamma_g\|^2}{-\eta^2\ c\ C+2\ \eta\ c\ \|g-\gamma_g\|}\ \tfrac{1}{2\,c}\ \|g-\gamma\|^2\ ,$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\,C} \le \frac{\|g-\gamma\|^2}{2\ c}\ \frac{1}{-\eta^2\ c\ C+2\ \eta\ c\ \|g-\gamma_g\|}\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{2\ c}{\|g-\gamma\|^2\ 2\ C} \le \frac{1}{-\eta^2\ c\ C+2\ \eta\ c\ \|g-\gamma_g\|}\\
\Leftrightarrow\quad &-\eta^2\ c\ C+2\ \eta\ c\ \|g-\gamma_g\| \le \frac{\|g-\gamma\|^2\ C}{c}\\
\Leftrightarrow\quad &2\ \eta\ c\ \|g-\gamma_g\| \le \frac{\|g-\gamma\|^2\ C}{c}+\eta^2\ c\ C\\
\Leftrightarrow\quad &\|g-\gamma_g\| \le \frac{C}{2\ \eta\ c^2}\ \|g-\gamma\|^2+\frac{\eta\ C}{2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

pour γ_g optimal dans (2.8), $\eta \le \varepsilon$ et γ arbitraire dans $\partial\phi(z_0)$.

En vue d'obtenir (2.7), prenons $\eta = \frac{\varepsilon\ c}{2\ C}$ ($\eta < \varepsilon$ puisque $c \le C$), $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\ c^2}{2\ C}\right)$.

Avec $g := g_0 + s$ et $\gamma :=$ la projection de g sur $\partial\phi(z_0)$, de sorte que $\|g-\gamma\| \le \frac{\varepsilon\ c^2}{2\ C}$, (2.11) devient

$$\begin{aligned}
\|g-\gamma_g\| \ &\le\ \frac{C}{2\ \frac{\varepsilon\ c}{2\ C}\ c^2}\ \frac{\varepsilon^2\ c^4}{4\ C^2}+\frac{\varepsilon\ c}{2\ C}\ \frac{C}{2}\\
&=\ \frac{\varepsilon\ c}{4}+\frac{\varepsilon\ c}{4}\\
&=\ \frac{\varepsilon\ c}{2}\ .
\end{aligned}$$

Or, puisque γ_g est optimal, nous avons, en vertu de la Proposition 1.6 (i) et (ii), p. 11, $0 \in \partial R_\varepsilon^*(\gamma_g)$, c'est-à-dire $\gamma_g \in \partial R_\varepsilon(0)$; avec le fait que $\|g-\gamma_g\| \le \frac{\varepsilon\ c}{2}$, cela implique donc que $g \in \partial R_\varepsilon(0) + B\left(0, \frac{\varepsilon\ c}{2}\right)$.

Nous aimerions à présent appliquer le Lemme 2.2 (i), p. 20, pour pouvoir remplacer R_ε^* par r^* dans (2.8). Pour ce faire, vérifions que nous sommes bien dans les conditions d'application de ce lemme, c'est-à-dire que

$$r(h) \ge r(0) + r'(0;h) + \tfrac{1}{2}\ c\ \|h\|^2\ , \qquad \text{pour } \|h\| \le \delta\ .$$

Or, par (2.3) et (2.6) , nous savons que $\frac{1}{2}\, c\, \|h\|^2 \leq r(h) \leq \frac{1}{2}\, C\, \|h\|^2$.
Ceci implique en particulier que

a) $r(0) = 0$;

b) $\frac{1}{2}\, c\, t^2\, \frac{\|h\|^2}{t} \leq \frac{r(t\,h)}{t} \leq \frac{1}{2}\, C\, t^2\, \frac{\|h\|^2}{t}$
et donc
$$r'(0;h) = \lim_{t\to 0} \frac{r(t\,h) - r(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{r(t\,h)}{t} = 0\,.$$

L'hypothèse du lemme est alors trivialement vérifiée puisque r satisfait (2.3).
Par conséquent, (2.8) devient
$$\phi^*(g_0 + s) - \langle g_0 + s, z_0\rangle \geq -\phi(z_0) + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g_0 + s - \gamma)$$
ou encore
$$\phi^*(g_0 + s) \geq \langle g_0, z_0\rangle + \langle s, z_0\rangle - \phi(z_0) + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g_0 + s - \gamma)\,.$$
Mais, puisque $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et en vertu de la Proposition 1.6 (iii), p. 11,
$$\phi^*(g_0) = \langle g_0, z_0\rangle - \phi(z_0)\,.$$
Il en résulte que
$$\phi^*(g_0 + s) \geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g_0 + s - \gamma)$$
et (2.7) est démontré. ■

Le reste dans l'expression (2.7) peut paraître abstrait. Le corollaire suivant en propose une forme assouplie plus explicite; c'est d'ailleurs celle que nous utiliserons dans le Chapitre 4.

Corollaire 2.4

Soit ϕ une fonction convexe à valeurs finies vérifiant (2.1) *en un point z_0 donné et supposons que la fonction r satisfasse* (2.3).
Alors, pour tout $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et pour tout $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\, C}{2}\right)$,
$$\phi^*(g_0 + s) \geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \frac{1}{2\,C}\, \|g_0 + s - P(g_0 + s)\|^2 \tag{2.12}$$
où P désigne la projection sur $\partial\phi(z_0)$.
De plus, pour tout $s \in N_{\partial\phi(z_0)}(g_0) \cap B\left(0, \frac{\varepsilon\, C}{2}\right)$ et $x \in \partial\phi^*(g_0 + s)$,
$$\langle s, x - z_0\rangle \geq \frac{\|s\|^2}{2\,C}\,. \tag{2.13}$$

Preuve :
Appliquons le Théorème 2.3, p. 24, avec $r(\bullet) = \frac{1}{2}\, C \, \| \bullet \|^2$, de sorte que, d'après (1.4), $r^*(\bullet) = \frac{1}{2\,C} \, \| \bullet \|^2$. Nous avons donc

$$\phi^*(g_0 + s) \geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0 \rangle + \min_{\gamma \in \partial\phi(z_0)} \frac{1}{2\,C} \, \|g_0 + s - \gamma\|^2 \, .$$

Or,

$$\min_{\gamma \in \partial\phi(z_0)} \|g_0 + s - \gamma\|^2 = \|g_0 + s - P(g_0 + s)\|^2 \, ,$$

et, par conséquent, (2.12) est vérifié.
Pour démontrer (2.13), utilisons l'inégalité du sous-gradient (1.5) en g_0

$$\phi^*(g_0) \geq \phi^*(g_0 + s) - \langle s, x \rangle \, , \qquad \forall \, x \in \partial\phi^*(g_0 + s) \, ,$$

et le fait que $P(g_0 + s) = g_0$.
Appliquant (2.12), nous avons

$$\begin{aligned} \phi^*(g_0 + s) \;&\geq\; \phi^*(g_0) + \langle s, z_0 \rangle + \frac{1}{2\,C} \, \|g_0 + s - g_0\|^2 \\ &\geq\; \phi^*(g_0 + s) - \langle s, x \rangle + \langle s, z_0 \rangle + \frac{1}{2\,C} \, \|s\|^2 \, , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\langle s, x - z_0 \rangle \geq \frac{1}{2\,C} \, \|s\|^2$$

et (2.13) est démontré. ■

Ce résultat est encore plus suggestif si nous envisageons une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^n$. Considérons $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$ qui sont respectivement le cône tangent et le cône normal à $\partial\phi(z_0)$ en g_0 . Dans ce cas, $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{T}$, ce qui signifie que tout élément s de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$s = s_{\mathcal{N}} + s_{\mathcal{T}} \qquad \text{où } s_{\mathcal{N}} := \mathrm{Proj}_{\mathcal{N}}(s) \;\text{ et }\; s_{\mathcal{T}} := \mathrm{Proj}_{\mathcal{T}}(s) \, .$$

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 2.5

Soit ϕ^* une fonction convexe, fermée, vérifiant (2.12) *pour tout* $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ *et* $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\, C}{2}\right)$.
Alors, pour tout g_0 et s comme ci-dessus,

$$\phi^*(g_0 + s) \geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0 \rangle + \frac{1}{2\,C} \, \|s_{\mathcal{N}}\|^2 \, . \qquad (2.14)$$

Preuve :
Soient $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\, C}{2}\right)$.
Commençons par vérifier que $\mathcal{T}$ contient $\bigcup_{t>0} \left[\frac{\partial\phi(z_0)-g_0}{t}\right]$.
Par définition d'un cône, il suffit de montrer que $\mathcal{T}$ contient $\partial\phi(z_0) - g_0$. Soit donc $x \in \partial\phi(z_0)$ et voyons si $x - g_0 \in \mathcal{T}$. Puisque $\partial\phi(z_0)$ est convexe et en vertu de (1.7), montrons que $x - g_0$ est une direction admissible pour $\partial\phi(z_0)$ à partir de g_0 . Or, c'est évidemment le cas, puisque x et $g_0 \in \partial\phi(z_0)$.
Par conséquent, $\partial\phi(z_0) \subseteq g_0 + \mathcal{T}$ et donc $\mathrm{Proj}_{\partial\phi(z_0)}(\bullet) \geq \mathrm{Proj}_{g_0+\mathcal{T}}(\bullet)$.
Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|g_0 + \bullet - \mathrm{Proj}_{\partial\phi(z_0)}(g_0 + \bullet)\| &\geq \|g_0 + \bullet - \mathrm{Proj}_{g_0+\mathcal{T}}(g_0 + \bullet)\| \\ &= \|\bullet - \mathrm{Proj}_{\mathcal{T}}(\bullet)\| \\ &= \|\mathrm{Proj}_{\mathcal{N}}(\bullet)\| \end{aligned}$$

et, en appliquant (2.12), nous avons alors

$$\begin{aligned} \phi^*(g_0 + s) &\geq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \tfrac{1}{2\,C}\, \|\mathrm{Proj}_{\mathcal{N}}(s)\|^2 \\ &= \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \tfrac{1}{2\,C}\, \|s_{\mathcal{N}}\|^2 \end{aligned}$$

et (2.14) est ainsi démontré. ■

Nous allons à présent établir un corollaire du Corollaire 2.4, p. 27, qui sera d'une importance capitale dans le Chapitre 4.

Corollaire 2.6

Soit ϕ une fonction convexe à valeurs finies et soit $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ où z_0 est un point donné.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$\exists\ \varepsilon, C > 0 : \|h\| \leq \varepsilon \ \Rightarrow\ \phi(z_0 + h) \leq \phi(z_0) + \phi'(z_0; h) + \tfrac{C}{2}\ \|h\|^2 \ , \tag{2.15}$$

$$\exists\ \delta, D > 0 : \|h\| \leq \delta \ \Rightarrow\ \partial\phi(z_0 + h) \subseteq \partial\phi(z_0) + B(0, D\ \|h\|)\ . \tag{2.16}$$

Preuve :
Commençons par montrer que (2.15) entraîne (2.16).
Comme $\partial\phi(z_0)$ est compact et que $\partial\phi$ a un graphe fermé, en vertu de la Proposition 2.1.5 dans [1], nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \partial\phi(z_0 + h) \subseteq \partial\phi(z_0) + B\left(0, \tfrac{\varepsilon\, C}{2}\right) .$$

Prenons alors un h arbitraire dans $B(0, \delta)$ et un g dans $\partial\phi(z_0 + h)$ et montrons que $g \in \partial\phi(z_0) + B(0, D\ \|h\|)$ pour un $D > 0$.
Posons $g_0 := \mathrm{Proj}_{\partial\phi(z_0)}(g) \in \partial\phi(z_0)$ et $s := g - g_0$.
Comme $g \in \partial\phi(z_0 + h) \subseteq \partial\phi(z_0) + B\left(0, \tfrac{\varepsilon\, C}{2}\right)$, nous avons

$$s \in N_{\partial\phi(z_0)}(g_0) \cap B\left(0, \tfrac{\varepsilon\, C}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_0 + h \in \partial\phi^*(g) .$$

Nous pouvons donc appliquer (2.13) avec $x = z_0 + h$

$$\langle g - g_0, z_0 + h - z_0 \rangle \ \geq \ \frac{\|g - g_0\|^2}{2\, C} ,$$

c'est-à-dire , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{\|g - g_0\|^2}{2\, C} \ \leq \ \|g - g_0\|\ \|h\| ,$$

ou encore

$$\|g - g_0\| \ \leq \ 2\, C\ \|h\| .$$

Dès lors, avec $D = 2\, C$, nous avons $g \in \partial\phi(z_0) + B(0, D\ \|h\|)$ et (2.15) est vérifié.
Réciproquement, pour montrer que (2.16) entraîne (2.15), utilisons le Théorème de la valeur moyenne :
pour $\theta \in]0, 1[$ et $g_\theta \in \partial\phi(z_0 + \theta\ h)$,

$$\begin{aligned}
\phi(z_0 + h) - \phi(z_0) - \phi'(z_0; h) &= \langle g_\theta, h \rangle - \phi'(z_0; h) \\
&= \langle g_\theta, h \rangle - \max_{g \in \partial\phi(z_0)} \langle g, h \rangle \\
&= \min_{g \in \partial\phi(z_0)} \langle g_\theta - g, h \rangle \\
&\leq \min_{g \in \partial\phi(z_0)} \|g_\theta - g\|\ \|h\|
\end{aligned}$$

où nous nous sommes servis de la Proposition 1.6 (iv), p. 11, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Supposant que (2.16) est vérifié et prenant $h \in B(0, \delta)$, nous avons

$$\theta\ h \in B(0, \delta)$$

et ainsi

$$\partial\phi(z_0 + \theta\ h) \subseteq \partial\phi(z_0) + B(0, D\ \|\theta\ h\|)\ .$$

Mais, puisque $g_\theta \in \partial\phi(z_0 + \theta\ h)$, cela entraîne que $g_\theta \in \partial\phi(z_0) + B(0, D\ \|\theta\ h\|)$, et, comme $g \in \partial\phi(z_0)$, nous avons alors $\|g_\theta - g\| \leq \theta\ D\ \|h\|$.
Par conséquent,

$$\phi(z_0 + h) - \phi(z_0) - \phi'(z_0; h) \leq \theta\ D\ \|h\|^2$$

et nous avons (2.15) avec $\varepsilon = \delta$ et $C = 2\ \theta\ D$. ■

2.4 Borner la conjuguée supérieurement

Nous allons à présent étudier l'effet sur ϕ^* de la propriété de croissance (2.2)-(2.3) et voir que cette propriété est assez forte.

Le théorème ci-dessous est l'équivalent dual du Théorème 2.3, p. 24, et pourtant ses hypothèses sont beaucoup moins fortes.

Théorème 2.7

Soit ϕ une fonction convexe à valeurs finies, vérifiant (2.2) en un point z_0 donné et supposons que la fonction r satisfasse (2.3).
Alors, pour tout $g_0 \in \partial\phi(z_0)$, ϕ^* est différentiable en g_0 ($\nabla\phi^*(g_0) = z_0$) et, pour tout $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\ c}{2}\right)$,

$$\phi^*(g_0 + s) \leq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0 \rangle + \min_{\gamma \in \partial\phi(z_0)} r^*(g_0 + s - \gamma)\ . \tag{2.17}$$

Preuve :
La démarche est analogue à celle de la preuve du Théorème 2.3, p. 24.
En conjuguant les deux membres de (2.2), nous obtenons

$$[\phi^* - \langle \bullet, z_0 \rangle \underset{\vee}{+} I^*_{B(0,\varepsilon)}](g) \leq -\phi(z_0) + [I_{\partial\phi(z_0)} \underset{\vee}{+} r^*](g)\ ,$$

c'est-à-dire, en vertu de (2.4) et (1.2) ,

$$\Phi_\varepsilon^*(g) - \langle g, z_0\rangle \leq -\phi(z_0) + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g-\gamma)\ .$$

Pour pouvoir appliquer le Lemme 2.2 (i), p. 20, avec la fonction ϕ^* , regardons si

$$\phi(h) \geq \phi(0) + \phi'(0;h) + \tfrac{1}{2}\, c\ \|h\|^2 \qquad \text{pour } \|h\| \leq \delta\ .$$

Or, cela est trivialement vérifié en vertu de (2.2) et (2.3) avec $\delta = \varepsilon$.
Par conséquent, par le Lemme 2.2 (i), p. 20, nous avons

$$\phi^*(g) - \langle g, z_0\rangle \leq -\phi(z_0) + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g-\gamma) \quad \text{pour } g \in \partial\phi(z_0) + B\left(0, \tfrac{\varepsilon\, c}{2}\right)\ .$$

En vue d'obtenir (2.17), posons alors $g = g_0 + s$ avec $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et $s \in B\left(0, \frac{\varepsilon\, c}{2}\right)$. Par la Proposition 1.6 (iii), p. 11,

$$\phi(z_0) + \phi^*(g_0) = \langle g_0, z_0\rangle$$

et la dernière inégalité se ramène alors à

$$\begin{aligned} &\phi^*(g_0+s) - \langle g_0, z_0\rangle - \langle s, z_0\rangle \leq -\phi(z_0) + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g_0+s-\gamma) \\ \Leftrightarrow\quad &\phi^*(g_0+s) \leq \phi^*(g_0) + \langle s, z_0\rangle + \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} r^*(g_0+s-\gamma)\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire (2.17).
D'autre part, puisque r vérifie (2.3), r^* vérifie

$$r^*(\bullet) \leq \tfrac{1}{2\,c}\ \|\bullet\|^2$$

et (2.17) donne

$$\begin{aligned} \phi^*(g_0+s) - \phi^*(g_0) - \langle s, z_0\rangle \ &\leq\ \tfrac{1}{2\,c} \min_{\gamma\in\partial\phi(z_0)} \|g_0+s-\gamma\|^2 \\ &\leq\ \tfrac{1}{2\,c}\ \|s\|^2\ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et donc $z_0 \in \partial\phi^*(g_0)$ ce qui, par la définition (1.5) appliquée au point $g_0 + s$, nous donne

$$\phi^*(g_0+s) - \phi^*(g_0) - \langle g_0+s-g_0, z_0\rangle \geq 0\ .$$

Des deux dernières inégalités, il découle que

$$0 \leq \frac{\phi^*(g_0+s) - \phi^*(g_0) - \langle s, z_0\rangle}{\|s\|} \leq \tfrac{1}{2\,c}\ \|s\|\ .$$

Passant à la limite pour $s \to 0$, nous obtenons $\nabla\phi^*(g_0) = z_0$, ce qui termine la démonstration. ■

De même que (2.12) et (2.14) étaient des formes faibles de (2.7), nous allons à présent donner une forme faible de (2.17).

Corollaire 2.8

Soit ϕ une fonction convexe à valeurs finies, vérifiant (2.2) *en un point z_0 donné et supposons que r satisfasse* (2.3). *Considérons $g_0 \in \partial\phi(z_0)$ et la décomposition $s = s_{\mathcal{T}} + s_{\mathcal{N}}$ d'un s arbitraire le long de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$, les cônes tangent et normal à $\partial\phi(z_0)$ en g_0 .*
Alors,

$$\limsup_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\phi^*(g_0 + t\ s) - \phi^*(g_0) - t\ \langle s, z_0\rangle}{t^2} \le \tfrac{1}{2\ c}\ \|s_{\mathcal{N}}\|^2 . \tag{2.18}$$

Preuve :
Puisque $s_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$, par définition du cône tangent, pour $t \underset{>}{\to} 0$, il existe un $g_t = g_0 + t\ s_{\mathcal{T}} + o(t) \in \partial\phi(z_0)$. Par (2.2) et (2.3), nous avons

$$\phi(z_0 + h) + I_{B(0,\varepsilon)}(h) \ge \phi(z_0) + \phi'(z_0; h) + \tfrac{1}{2}\ c\ \|h\|^2 .$$

Or, puisque $g_t \in \partial\phi(z_0)$ et en vertu de la Proposition 1.6 (iv), p. 11, nous avons $\phi'(z_0; h) \ge \langle g_t, h\rangle$. Par conséquent, nous obtenons

$$\phi(z_0 + h) \ge \phi(z_0) + \langle g_t, h\rangle + \tfrac{1}{2}\ c\ \|h\|^2 - I_{B(0,\varepsilon)}(h) .$$

Or, remarquons que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{-I_{B(0,\varepsilon)}(h)}{\|h\|^2} = 0 ,$$

c'est-à-dire que

$$-I_{B(0,\varepsilon)}(h) = o(\|h\|^2) .$$

Nous avons donc finalement

$$\phi(z_0 + h) \ge \phi(z_0) + \langle g_t, h\rangle + \tfrac{1}{2}\ c\ \|h\|^2 + o(\|h\|^2) .$$

Si nous appliquons la Proposition X 4.2.6 dans [2], nous obtenons

$$\phi^*(g_t + \nu) \le \phi^*(g_t) + \langle \nu, z_0\rangle + \tfrac{1}{2\ c}\ \|\nu\|^2 + o(\|\nu\|^2) , \quad \forall\ \nu .$$

Par ailleurs, $g_t \in \partial\phi(z_0)$ et donc, par la Proposition 1.6 (ii), p. 11, $z_0 \in \partial\phi^*(g_t)$, ce qui entraîne par (1.5)

$$\phi^*(g_t) \leq \phi^*(g_0) + \langle z_0, g_t - g_0\rangle \ .$$

Dès lors, nous avons

$$\phi^*(g_t + \nu) \leq \phi^*(g_0) + \langle g_t - g_0 + \nu, z_0\rangle + \tfrac{1}{2\,c}\ \|\nu\|^2 + o(\|\nu\|^2) \ .$$

Si nous prenons $\nu := t\ s - g_t + g_0 = t\ s - t\ s_{\mathcal{T}} - o(t) = t\ (s - s_{\mathcal{T}}) + o(t) = t\ s_{\mathcal{N}} + o(t)$ et que nous divisons par t^2 , nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi^*(t\ s + g_0) - \phi^*(g_0) - \langle g_t - g_0 + t\ s - g_t + g_0, z_0\rangle}{t^2} \\
&= \frac{\phi^*(t\ s + g_0) - \phi^*(g_0) - t\ \langle s, z_0\rangle}{t^2} \\
&\leq \tfrac{1}{2\,c}\ \frac{\|\nu\|^2}{t^2} + \frac{o(\|\nu\|^2)}{t^2} \ .
\end{aligned}$$

(2.18) en découle en prenant la $\limsup\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}}$, car $o(\|\nu\|^2) = o(t^2)$. ∎

Chapitre 3

La décomposition $\mathcal{U}-\mathcal{V}$

3.1 Notations

L'espace $\mathbb{R}^n$ dans lequel nous travaillons est muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ et de la norme associée $\| \bullet \|$.

Étant donné un sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}^n$, nous notons $\langle \bullet, \bullet \rangle_S$ et $\| \bullet \|_S$ respectivement le produit scalaire et la norme induits.

$B(x, r)$ représente la boule de $\mathbb{R}^n$, centrée en x et de rayon r ; dans un sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}^n$, nous utilisons à nouveau la notation $B_S(x, r)$.

Nous notons x_S la projection d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sur le sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}^n$.

Comme dans les chapitres précédents, $T_S(x)$ et $N_S(x)$ désignent respectivement le cône tangent et le cône normal à une partie S de $\mathbb{R}^n$ en un point x de S .

Dans la suite, nous allons considérer :

$$\text{une fonction } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ convexe et à valeurs finies, } \overline{p} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \overline{g} \in \partial f(\overline{p}) \text{ fixés.} \tag{3.1}$$

Nous serons souvent amenés à supposer par ailleurs que $\overline{g}$ se trouve dans ri $\partial f(\overline{p})$, l'intérieur relatif de $\partial f(\overline{p})$, c'est-à-dire qu'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\overline{g} + (B(0, \eta) \cap \operatorname{aff}(\partial f(\overline{p})) \subseteq \partial f(\overline{p}) \tag{3.2}$$

où $\operatorname{aff}(\partial f(\overline{p}))$ désigne l'enveloppe affine de l'ensemble $\partial f(\overline{p})$.

Nous allons à présent définir une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^n$ en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, associée au point $\overline{p}$ fixé en (3.1). Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ vont être définis de trois manières différentes, mais équivalentes.

3.2 Définition des espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$

3.2.1 Première définition

Nous aimerions définir un sous-espace vectoriel sur lequel $f(\overline{p}+\bullet)$ soit différentiable. Or, nous savons (voir par exemple le Théorème 25.2 dans [6]) que

$$f \text{ est différentiable en } \overline{p} \text{ si et seulement si } f'(\overline{p};\bullet) \text{ est linéaire.}$$

Définissons dès lors $\mathcal{U}_1$ comme le "*plus gros*" sous-espace vectoriel de $I\!R^n$ où la dérivée directionnelle $f'(\overline{p};\bullet)$ est linéaire et prenons $\mathcal{V}_1 := \mathcal{U}_1^{\perp}$. Nous savons que $f'(\overline{p};\bullet)$ est une fonction sous-linéaire; dès lors, en vertu de (1.6), nous avons

$$\mathcal{U}_1 := \{d \in I\!R^n : f'(\overline{p};d) + f'(\overline{p};-d) = 0\} .$$

Transformons quelque peu cette expression de $\mathcal{U}_1$ en utilisant la Proposition 1.6 (iv), p. 11. Puisque $f'(\overline{p};d) = \max_{g\in\partial f(\overline{p})} \langle g,d\rangle$, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} -f'(\overline{p};-d) &= -\max_{g\in\partial f(\overline{p})}\langle g,-d\rangle \\ &= \min_{g\in\partial f(\overline{p})}\langle g,d\rangle \end{aligned}$$

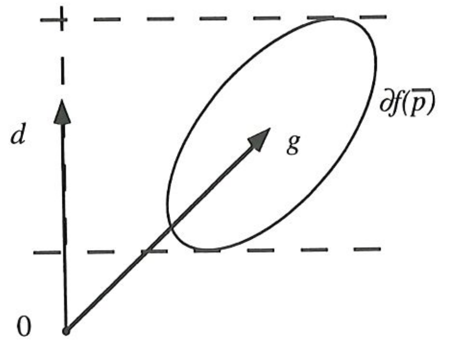
et nous pouvons écrire

$$\mathcal{U}_1 = \{d \in I\!R^n : \max_{g\in\partial f(\overline{p})}\langle g,d\rangle = \min_{g\in\partial f(\overline{p})}\langle g,d\rangle\} .$$

Nous avons ainsi obtenu le plus gros sous-espace vectoriel où $f(\bullet) : \overline{p} + \mathcal{U}_1 \to I\!R$ est différentiable en $\overline{p}$, c'est-à-dire où $f(\overline{p}+\bullet) : \mathcal{U}_1 \to I\!R$ est différentiable en 0 .

En dimension 2, nous allons illustrer cette définition en envisageant trois cas.

(i) Si $\partial f(\overline{p})$ est de dimension 2 :

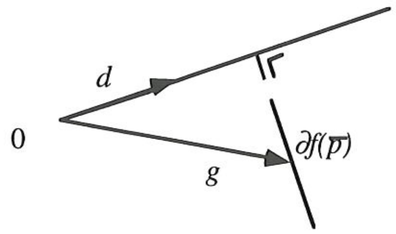


$\mathcal{U}_1$ est formé de l'ensemble des vecteurs d qui ont un produit scalaire constant avec tous les éléments de $\partial f(\overline{p})$.

Dans notre cas, nous voyons que le seul vecteur répondant à cette question est le vecteur nul.

Dès lors, $\mathcal{U}_1 = \{0\}$.

(ii) Si $\partial f(\overline{p})$ est de dimension 1 :



Ici, les seuls vecteurs ayant un produit scalaire constant avec tous les sous-gradients de f en $\overline{p}$ sont ceux situés sur la droite vectorielle orthogonale à $\partial f(\overline{p})$. Cette droite forme donc le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}_1$.

(iii) Si $\partial f(\overline{p})$ est de dimension 0 :

Puisque $\partial f(\overline{p})$ n'est constitué que d'un seul élément, tous les vecteurs de $I\!R^n$ ont évidemment un produit scalaire constant avec les éléments de $\partial f(\overline{p})$, et dès lors $\mathcal{U}_1 = I\!R^n$.

3.2.2 Deuxième définition

Définissons cette fois $\mathcal{V}_2$ comme le sous-espace vectoriel parallèle à l'enveloppe affine de $\partial f(\overline{p})$, c'est-à-dire

$$\mathcal{V}_2 := \operatorname{span}\{\partial f(\overline{p}) - \overline{g}\}$$

pour $\overline{g}$ arbitraire dans $\partial f(\overline{p})$.

Posons $\mathcal{U}_2 := \mathcal{V}_2^{\perp}$, ce qui signifie que

$$d \in \mathcal{U}_2 \Leftrightarrow \langle \overline{g} + v, d \rangle = \langle \overline{g}, d \rangle \ , \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_2 \ .$$

3.2.3 Troisième définition

Définissons enfin

$$\mathcal{U}_3 := N_{\partial f(\overline{p})}(g^0)$$

et

$$\mathcal{V}_3 := T_{\partial f(\overline{p})}(g^0)$$

où g^0 est un point arbitraire dans $\operatorname{ri}\partial f(\overline{p})$.

En vertu de la Proposition 1.14, p. 17, nous savons que

$$g^0 \in \operatorname{ri}\partial f(\overline{p}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{U}_3 \text{ et } \mathcal{V}_3 \text{ sont des sous-espaces vectoriels.}$$

3.2.4 Équivalence des définitions

Nous allons à présent montrer que nous venons en réalité de définir de trois façons différentes les mêmes sous-espaces.

Proposition 3.1

Considérons les trois définitions ci-dessus. Dans ces conditions,

(i) $$\mathcal{U}_3 \overset{\text{déf}}{=} N_{\partial f(\overline{p})}(g^0) = \{d \in I\!R^n : \langle g - g^0, d\rangle = 0 \ , \ \forall\, g \in \partial f(\overline{p})\} \qquad (3.3)$$

et est indépendant du choix de $g^0 \in \operatorname{ri}\partial f(\overline{p})$ *;*

(ii) $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_3$ *;*

nous les noterons dorénavant $\mathcal{U}$ *;*

(iii) $\mathcal{U} \subseteq N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g})\ , \quad \forall\, \overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.

Preuve :

[(i)] a) Commençons par montrer (3.3) et, à cet effet, considérons un g^0 arbitraire dans $\operatorname{ri}\partial f(\overline{p})$.

Nous savons, en vertu de (1.8) et parce que le sous-différentiel est un ensemble convexe, que $N_{\partial f(\overline{p})}(g^0) = \{d \in I\!R^n : \langle g - g^0, d\rangle \le 0 \ , \ \forall\, g \in \partial f(\overline{p})\}$.

Dès lors, $\{d \in I\!R^n : \langle g - g^0, d\rangle = 0 \ , \ \forall\, g \in \partial f(\overline{p})\} \subseteq N_{\partial f(\overline{p})}(g^0)$ et il nous reste à montrer l'autre inclusion.

Pour cela, considérons $d \in N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g})$ et $g \in \partial f(\overline{p})$ arbitraires.
Puisque nous avons déjà que $\langle g - g^0, d\rangle \leq 0$, il reste à voir que $\langle g - g^0, d\rangle \geq 0$ pour pouvoir conclure que $\langle g - g^0, d\rangle = 0$ et donc que d appartient à l'ensemble considéré.
Supposons sans perdre de généralité que $g - g^0 \neq 0$ et posons

$$v := -\frac{g - g^0}{\|g - g^0\|} \in \mathcal{V}_2 \cap B(0,1) .$$

Puisque $g^0 \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$, il existe $\eta > 0$ tel que $g^0 + (B(0,\eta) \cap \mathcal{V}_2) \subseteq \partial f(\overline{p})$.
Or, $\eta\ v \in \mathcal{V}_2 \cap B(0,\eta)$ et donc $g^0 + \eta\ v \in \partial f(\overline{p})$.
Par conséquent, $\langle g^0 + \eta\ v - g^0, d\rangle \leq 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \langle \eta\ v, d\rangle &= \left\langle -\eta\ \frac{g - g^0}{\|g - g^0\|}, d \right\rangle \\ &= \frac{-\eta}{\|g - g^0\|}\ \langle g - g^0, d\rangle \leq 0 \ , \text{ avec } \eta > 0 \text{ et } \|g - g^0\| > 0 \ , \end{aligned}$$

et donc $\langle g - g^0, d\rangle \geq 0$.

b) Pour voir l'indépendance du choix de g^0 dans $\operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$, remplaçons, dans (3.3), g^0 par $\gamma^0 \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$.
Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} N_{\partial f(\overline{p})}(\gamma^0) &= \{d \in I\!R^n : \langle g - \gamma^0, d\rangle = 0 \ , \ \forall\ g \in \partial f(\overline{p})\} \\ &= \{d \in I\!R^n : \langle g, d\rangle = \langle \gamma^0, d\rangle \ , \ \forall\ g \in \partial f(\overline{p})\} \ . \end{aligned}$$

En particulier, pour $g = g^0$, nous avons $\langle g^0, d\rangle = \langle \gamma^0, d\rangle$ et donc

$$\begin{aligned} N_{\partial f(\overline{p})}(\gamma^0) &= \{d \in I\!R^n : \langle g, d\rangle = \langle g^0, d\rangle \ , \ \forall\ g \in \partial f(\overline{p})\} \\ &= N_{\partial f(\overline{p})}(g^0) \\ &= \mathcal{U}_3 \ . \end{aligned}$$

[(ii)] a) Puisque $\mathcal{U}_1 = \left\{ d \in I\!R^n : \max_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle = \min_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle \right\}$, il découle de (i) que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_3$. En effet,

- si $d \in \mathcal{U}_1$, nous avons

$$\max_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle = \min_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle \leq \langle g, d\rangle \leq \max_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle$$

et donc

$$\langle g, d\rangle = \langle g^0, d\rangle \ , \qquad \forall\ g \in \partial f(\overline{p}) \ ,$$

c'est-à-dire $d \in \mathcal{U}_3$.

- si $d \in \mathcal{U}_3$, nous avons

$$\langle g^0, d\rangle = \langle g, d\rangle \ , \qquad \forall\ g \in \partial f(\overline{p})$$

et donc

$$\langle g^0, d\rangle = \max_{g\in\partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle = \min_{g\in\partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle \ ,$$

c'est-à-dire $d \in \mathcal{U}_1$.

Montrer (ii) revient donc à voir que $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_3$.

b) Soit $d \in \mathcal{U}_1$ et soit $v = \sum_j \lambda_j\ (g_j - \overline{g}) \in \mathcal{V}_2$ avec $g_j \in \partial f(\overline{p})$.

Nous avons

$$\langle v, d\rangle = \sum_j \lambda_j\ (\langle g_j, d\rangle - \langle \overline{g}, d\rangle) = 0$$

puisque $d \in \mathcal{U}_1$.

Dès lors, $d \in \mathcal{V}_2^{\perp} = \mathcal{U}_2$.

c) Soit $d \in \mathcal{U}_2 = \mathcal{V}_2^{\perp}$.

Par définition, $g - \overline{g} \in \mathcal{V}_2$ pour tout $g \in \partial f(\overline{p})$, et ainsi

$$\langle g - \overline{g}, d\rangle = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \langle g, d\rangle = \langle \overline{g}, d\rangle \ , \ \forall\ g \in \partial f(\overline{p}) \ .$$

En particulier, puisque $g^0 \in \partial f(\overline{p})$, $\langle g^0, d\rangle = \langle \overline{g}, d\rangle$
et donc $\langle g, d\rangle = \langle g^0, d\rangle$, $\forall\ g \in \partial f(\overline{p})$, ce qui, en vertu de (i), montre que $d \in \mathcal{U}_3$.

[**(iii)**] Soient $d \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_3$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.

Nous avons alors

$$\langle g^0, d\rangle = \langle g, d\rangle \ , \qquad \forall\ g \in \partial f(\overline{p})$$

et en particulier $\langle g^0, d\rangle = \langle \overline{g}, d\rangle$.

Dès lors, $\langle g, d\rangle = \langle \overline{g}, d\rangle$, $\forall\ g \in \partial f(\overline{p})$, c'est-à-dire $d \in N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g})$. ∎

3.2.5 Exemple

Considérons l'exemple suivant auquel nous reviendrons à plusieurs reprises :

Soit $f(x_1, x_2) = \max\left\{-x_2, x_2 + \frac{1}{2}\, x_1^2\right\}$.
Notons $\ell(x_1, x_2) \equiv -x_2$ et $q(x_1, x_2) \equiv x_2 + \frac{1}{2}\, x_1^2$.
Nous avons $\ell(x_1, x_2) = q(x_1, x_2)$ si et seulement si $x_2 = -\frac{1}{4}\, x_1^2$.

Plaçons-nous au point $\overline{p} = (0,0)$ et, afin de calculer les sous-espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, déterminons d'abord $\partial f(0,0)$.
Utilisons la règle de calcul suivante :

> *Si* $f(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$ *où* f_i *est convexe pour tout* $i \in I$ *,*
> *alors,*
> $$\partial f(x) = \mathrm{CO}\Big(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \Big)$$
> *où* CO *désigne l'enveloppe convexe et* $I(x) = \{i \in I : f_i(x) = f(x)\}$ *.*

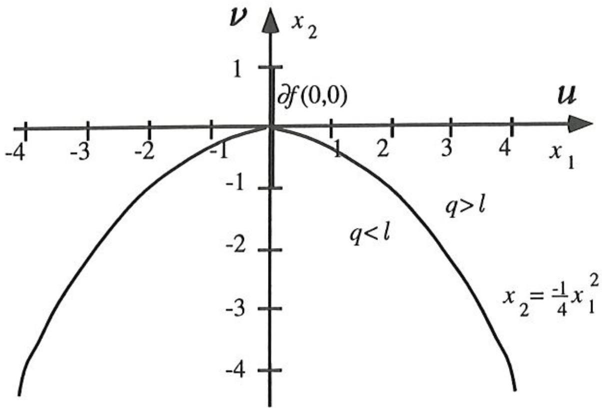
Ici,

$$\begin{aligned} f(0,0) &= q(0,0) = \ell(0,0)\ , \\ \partial q(0,0) &= \{\nabla q(0,0)\} = \{(0,1)\}\ , \\ \partial \ell(0,0) &= \{\nabla \ell(0,0)\} = \{(0,-1)\}\ . \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \partial f(0,0) &= \mathrm{CO}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} : -1 \le \beta \le 1\right\}\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, utilisant par exemple la définition du point 3.2.2, $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{\partial f(0,0) - \overline{g}\}$ pour $\overline{g}$ arbitraire dans $\partial f(0,0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{V}$ est l'axe vertical.
Et comme $\mathcal{U} = \mathcal{V}^\perp$, $\mathcal{U}$ est l'axe horizontal.



Remarquons que

- si $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$, alors $x_2 = 0$ et $f(x_1, x_2) = \max\left\{0, \frac{1}{2}\, x_1^2\right\} = \frac{1}{2}\, x_1^2$.
  La fonction f restreinte à $\mathcal{U}$ est donc différentiable en 0 .
- si $(x_1, x_2) \in \mathcal{V}$, alors $x_1 = 0$ et $f(x_1, x_2) = \max\{-x_2, x_2\} = |x_2|$.
  La fonction f restreinte à $\mathcal{V}$ n'est pas différentiable en 0 .

3.3 Manipulation de la notation $\mathcal{U}-\mathcal{V}$

Nous venons de définir une décomposition en somme directe de $\mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$; tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut à présent être décomposé en $x = (x_\mathcal{U}, x_\mathcal{V})^T$ où $x_\mathcal{U}$ est la projection de x sur $\mathcal{U}$ et $x_\mathcal{V}$ sa projection sur $\mathcal{V}$. Dans la suite, nous noterons $x_\mathcal{U} \oplus x_\mathcal{V}$ le vecteur de composantes $x_\mathcal{U}$ et $x_\mathcal{V}$. En d'autres termes, $\oplus$ représente l'application linéaire de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n , \\ (u, v) & \rightsquigarrow & u \oplus v := \binom{u}{v} . \end{array} \tag{3.4}$$

Avec cette convention, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont eux-mêmes considérés comme des espaces vectoriels; nous les munissons du produit scalaire induit de $\mathbb{R}^n$, de sorte que

$$\langle g, x \rangle = \langle g_\mathcal{U} \oplus g_\mathcal{V}, x_\mathcal{U} \oplus x_\mathcal{V} \rangle = \langle g_\mathcal{U}, x_\mathcal{U} \rangle_\mathcal{U} + \langle g_\mathcal{V}, x_\mathcal{V} \rangle_\mathcal{V}$$

et de la norme associée

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \langle x_\mathcal{U} \oplus x_\mathcal{V}, x_\mathcal{U} \oplus x_\mathcal{V} \rangle &= \langle x_\mathcal{U}, x_\mathcal{U} \rangle_\mathcal{U} + \langle x_\mathcal{V}, x_\mathcal{V} \rangle_\mathcal{V} \\ &= \|x_\mathcal{U}\|_\mathcal{U}^2 + \|x_\mathcal{V}\|_\mathcal{V}^2 . \end{aligned}$$

Nous donnons à présent quelques résultats pour nous familiariser avec l'opération $\oplus$ et la notation $\mathcal{U}-\mathcal{V}$, abondamment utilisées dans les chapitres suivants.

Proposition 3.2

Considérons les trois fonctions convexes h_1 , h_2 et h définies par :

$$\begin{array}{rcl} h_1 & : & \mathcal{U} \to I\!R\,, \\ & & u \rightsquigarrow h_1(u) := f(\overline{p} + u \oplus v) \qquad \text{avec } v \in \mathcal{V} \text{ arbitraire;} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h_2 & : & \mathcal{V} \to I\!R\,, \\ & & v \rightsquigarrow h_2(v) := f(\overline{p} + u \oplus v) \qquad \text{avec } u \in \mathcal{U} \text{ arbitraire;} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h & : & \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to I\!R\,, \\ & & (u,v) \rightsquigarrow h(u,v) := f(\overline{p} + u \oplus v)\,. \end{array}$$

Leurs sous-différentiels ont les expressions :

$$\begin{aligned} \partial h_1(u) &= \{g_{\mathcal{U}} : g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus v)\}\,, \\ \partial h_2(v) &= \{g_{\mathcal{V}} : g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus v)\}\,, \\ \partial h(u,v) &= \{g_{\mathcal{U}} \oplus g_{\mathcal{V}} : g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus v)\}\,. \end{aligned}$$

Preuve :
Considérons l'opérateur affine $A_1 : \mathcal{U} \to I\!R^n$ défini par $A_1(u) := \overline{p} + u \oplus v$, de sorte que $h_1 = f \circ A_1$.
La partie linéaire de A_1 est $L_1\, u := u \oplus 0$. Calculons l'adjointe L_1^A de L_1 .
Soit $z = z_{\mathcal{U}} \oplus z_{\mathcal{V}} \in I\!R^n$. Par définition, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \langle L_1\, u, z\rangle = \langle u, L_1^A\, z\rangle_{\mathcal{U}} &\Leftrightarrow \langle u \oplus 0, z_{\mathcal{U}} \oplus z_{\mathcal{V}}\rangle = \langle u, L_1^A\, z\rangle_{\mathcal{U}} \\ &\Leftrightarrow \langle u, z_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}} + \langle 0, z_{\mathcal{V}}\rangle_{\mathcal{V}} = \langle u, L_1^A\, z\rangle_{\mathcal{U}} \\ &\Leftrightarrow \langle u, z_{\mathcal{U}}\rangle_{\mathcal{U}} = \langle u, L_1^A\, z\rangle_{\mathcal{U}} \\ &\Leftrightarrow z_{\mathcal{U}} = L_1^A\, z\,. \end{aligned}$$

L'adjointe de L_1 est donc la projection sur $\mathcal{U}$.

Le Théorème VI 4.2.1 dans [2] nous donne alors la règle de calcul suivante :

$$\partial(f \circ A_1)(u) = L_1^A \, \partial f(A_1 \, u) = (\partial f(A_1 \, u))_{\mathcal{U}} \, ,$$

c'est-à-dire

$$\partial h_1(u) = \{g_{\mathcal{U}} : g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus v)\} \, .$$

La démonstration pour ∂h_2 est analogue : on utilise l'opérateur affine $A_2 : \mathcal{V} \longrightarrow I\!R^n$ où $A_2(v) := \overline{p} + u \oplus v$.
En ce qui concerne h , considérons cette fois l'opérateur $A : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow I\!R^n$ tel que $A(u,v) := \overline{p} + u \oplus v$, de sorte que $h = f \circ A$.
La partie linéaire de A est à présent $L := \oplus$. Calculons son adjointe L^A .
Soit $z = z_{\mathcal{U}} \oplus z_{\mathcal{V}} \in I\!R^n$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} &\langle L(u,v), z\rangle = \langle (u,v), L^A \, z\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \langle u \oplus v, z_{\mathcal{U}} \oplus z_{\mathcal{V}}\rangle = \langle (u,v), L^A \, z\rangle = \langle u \oplus v, L^A \, z\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad z_{\mathcal{U}} \oplus z_{\mathcal{V}} = L^A \, z \, . \end{aligned}$$

Utilisant à nouveau la règle de calcul du Théorème VI 4.2.1 dans [2], nous avons

$$\partial(f \circ A)(u,v) = L^A \, \partial f(A(u,v)) = (\partial f(A(u,v)))_{\mathcal{U}} \oplus (\partial f(A(u,v)))_{\mathcal{V}} \, ,$$

c'est-à-dire

$$\partial h(u,v) = \{g_{\mathcal{U}} \oplus g_{\mathcal{V}} : g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus v)\} \, .$$

■

Dans (3.1), nous avons choisi un sous-gradient $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$. Considérons, à présent, un $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$ et traduisons cela dans le langage $\mathcal{U}-\mathcal{V}$.

Proposition 3.3

Supposons, dans (3.1), que $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$.
Alors, il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout v non nul dans $\mathcal{V}$,

$$\overline{g} + 0 \oplus \frac{\eta \, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \in \partial f(\overline{p}) \, .$$

En particulier, pour tout (u,v) dans $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$,

$$f(\overline{p} + u \oplus v) \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} + \eta \, \|v\|_{\mathcal{V}} \, . \tag{3.5}$$

Preuve :
Par les définitions (3.2) et 3.2.2, nous savons qu'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\overline{g} + (B(0,\eta) \cap \mathcal{V}) \subseteq \partial f(\overline{p}) .$$

Or, pour tout $v \neq 0$ dans $\mathcal{V}$,

$$0 \oplus \frac{\eta\, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \in B(0,\eta) \cap \mathcal{V} \qquad \text{et donc} \qquad \overline{g} + 0 \oplus \frac{\eta\, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \in \partial f(\overline{p}) .$$

En vertu de (1.5), nous avons alors

$$f(z) \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g} + 0 \oplus \frac{\eta\, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \ , \ z - \overline{p} \rangle \ , \qquad \forall\, z \in I\!R^n .$$

Si, en particulier, nous prenons $z = \overline{p} + u \oplus v$ avec $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{V}$ arbitraires, cela donne

$$f(\overline{p} + u \oplus v) \ \geq \ f(\overline{p}) + \langle \overline{g} + 0 \oplus \frac{\eta\, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \ , \ u \oplus v \rangle$$

ou encore

$$\begin{aligned} f(\overline{p} + u \oplus v) \ &\geq \ f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}}, u \oplus v \rangle + \langle 0 \oplus \frac{\eta\, v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \ , \ u \oplus v \rangle \\ &= \ f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} + \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v \rangle_{\mathcal{V}} + \eta \left\langle \frac{v}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \ , \ v \right\rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \ f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} + \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v \rangle_{\mathcal{V}} + \eta\ \|v\|_{\mathcal{V}} . \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Le $\mathcal{U}$-Lagrangien

4.1 Définitions et propriétés de base

4.1.1 Définitions

La fonction $L_{\mathcal{U}}$ que nous allons définir à présent est la clef de voûte de tous les développements qui suivront.

Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction convexe à valeurs finies, $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.

Le **$\mathcal{U}$-Lagrangien** de f associé à $\overline{g}$ est la fonction notée $L_{\mathcal{U}}$ et définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} &\to I\!R\,, \\ u &\rightsquigarrow L_{\mathcal{U}}(u) := \inf_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \right\} . \end{aligned} \tag{4.1}$$

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont les sous-espaces définis au Chapitre 3 et associés au point $\overline{p}$. Il est important de remarquer que la fonction $L_{\mathcal{U}}$ dépend du choix de $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$ et que, dès lors, une notation plus rigoureuse, mais aussi plus lourde à manipuler, aurait été $L_{\mathcal{U}}(u, \overline{g})$.

Au $\mathcal{U}$-Lagrangien défini ci-dessus, nous associons l'ensemble des minimiseurs :

$$W(u) := \operatorname*{argmin}_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \right\} \subseteq \mathcal{V} . \tag{4.2}$$

Notons au passage deux cas particuliers :

a) Lorsque f est différentiable en $\overline{p}$, nous avons $\mathcal{U} = I\!R^n$ et $\mathcal{V} = \{0\}$.
Par conséquent, $L_{\mathcal{U}} \equiv f$.

b) Lorsque $\partial f(\overline{p})$ est de dimension n , nous avons $\mathcal{U} = \{0\}$ et $\mathcal{V} = I\!R^n$.
Le $\mathcal{U}$-Lagrangien n'est donc défini qu'à l'origine et nous avons

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{U}}(0) &= \inf_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + 0 \oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \right\} \\ &= -\sup_{v\in\mathcal{V}} \left\{ \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} - f(\overline{p} + 0 \oplus v) \right\} \\ &= -\sup_{v\in I\!R^n} \left\{ \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} - f(\overline{p} + 0 \oplus v) \right\} \\ &= -\Big(f(\overline{p} + 0\oplus \bullet) \Big)^*(\overline{g}_{\mathcal{V}}) \, . \end{aligned}$$

4.1.2 Exemple

Revenons à notre exemple 3.2.5 et calculons le $\mathcal{U}$-Lagrangien. Pour insister sur le fait que $L_{\mathcal{U}}$ dépend du sous-gradient $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$, nous allons le calculer avec deux sous-gradients différents.

Rappelons que nous avons choisi $\overline{p} = (0,0)$ et que, dans ce cas, $\mathcal{U} = \mathcal{V} = I\!R$.

a) Choisissons $\overline{g} = (0,1) \in \partial f(0,0)$.

Cela veut dire que $\overline{g}_{\mathcal{U}} = 0$ et $\overline{g}_{\mathcal{V}} = 1$.

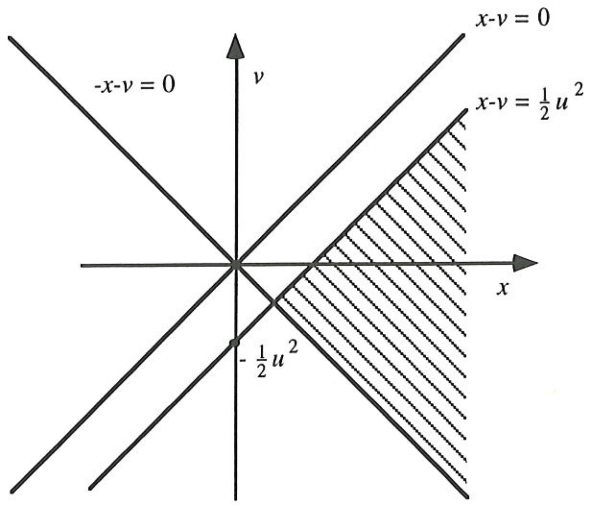
D'après (4.1), nous avons, pour $u \in \mathcal{U} = I\!R$,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{U}}(u) &= \inf_{v\in I\!R} \left\{ f((0,0) + (u,v)) - \langle 1, v\rangle_{I\!R} \right\} \\ &= \inf_{v\in I\!R} \left\{ f(u,v) - v \right\} \\ &= \inf_{v\in I\!R} \left\{ \max\left\{ -v, v + \tfrac{1}{2}\, u^2 \right\} - v \right\} . \end{aligned}$$

Si nous posons $x = \max\left\{-v, v + \frac{1}{2}\, u^2\right\}$, $L_{\mathcal{U}}(u)$ est la valeur optimale de (P) :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \min\limits_{v} \; x - v \\ \text{sous les contraintes } x \geq -v \, , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \geq v + \frac{1}{2}\, u^2 \, . \end{cases}$$

En résolvant graphiquement ce problème, nous obtenons



Nous voyons que $\min x - v = \frac{1}{2}\, u^2$ et dès lors,

$$L_{\mathcal{U}}(u) = \tfrac{1}{2}\, u^2 \,. \tag{4.3}$$

Pour obtenir $W(u)$, cherchons l'ensemble des v qui réalisent le minimum.

Résolvant le système

$$\begin{cases} -x - v &= 0 \,, \\ x - v &= \tfrac{1}{2}\, u^2 \,, \end{cases}$$

nous trouvons

$$\begin{cases} x &= \tfrac{1}{4}\, u^2 \,, \\ v &= -\tfrac{1}{4}\, u^2 \,, \end{cases}$$

et donc

$$W(u) = \left\{ v \in I\!R : v \geq -\tfrac{1}{4}\, u^2 \right\} \,. \tag{4.4}$$

b) Choisissons cette fois $\overline{g} = (0,0)$ et appliquons la même démarche.

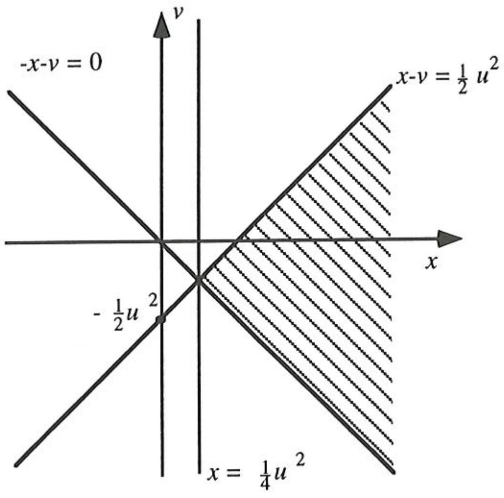
D'après (4.1), nous avons, pour $u \in \mathcal{U} = I\!R$,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{U}}(u) &= \inf_{v \in I\!R} \left\{ f((0,0) + (u,v)) - \langle 0, v \rangle_{I\!R} \right\} \\ &= \inf_{v \in I\!R} \left\{ f(u,v) \right\} \\ &= \inf_{v \in I\!R} \left\{ \max \left\{ -v, v + \tfrac{1}{2}\, u^2 \right\} \right\} . \end{aligned}$$

Posons $x = \max\left\{-v, v + \frac{1}{2}\,u^2\right\}$.
$L_{\mathcal{U}}(u)$ est la valeur optimale de (P) :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \min x \\ \text{sous les contraintes } x \geq -v \,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \geq v + \frac{1}{2}\,u^2 \,, \end{cases}$$

que nous résolvons à nouveau graphiquement.



Nous voyons que $\min x = \frac{1}{4}\,u^2$, c'est-à-dire que

$$L_{\mathcal{U}}(u) = \frac{1}{4}\,u^2 \tag{4.5}$$

qui est manifestement différent de (4.3).

Ici, $v \in W(u) \Leftrightarrow -x - v = 0$ où $x = L_{\mathcal{U}}(u)$ et donc

$$W(u) = \left\{-\frac{1}{4}\,u^2\right\} .$$

4.1.3 Premières propriétés du $\mathcal{U}$-Lagrangien

Le théorème ci-dessous regroupe quelques propriétés de base du $\mathcal{U}$-Lagrangien et de l'ensemble $W(u)$ que nous venons de définir.

Théorème 4.1

Soient une fonction f convexe et à valeurs finies, un point $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.
Alors,

(i) la fonction $L_{\mathcal{U}}$ définie en (4.1) est convexe et à valeurs finies;

(ii) $w \in W(u)$ si et seulement si il existe un $g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$ tel que $g_{\mathcal{V}} = \overline{g}_{\mathcal{V}}$;

(iii) en particulier, $0 \in W(0)$ et $L_{\mathcal{U}}(0) = f(\overline{p})$;

(iv) si $\overline{g} \in \mathrm{ri}\, \partial f(\overline{p})$, alors $W(u)$ est non vide pour tout $u \in \mathcal{U}$ et $W(0) = \{0\}$.

Preuve :

[(i)] En vertu du paragraphe IV 2.4 dans [2], $L_{\mathcal{U}}$ est convexe si $f(\overline{p}+u\oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}}$ est minorée sur $\{u\} \times \mathcal{V}$ pour tout $u \in \mathcal{U}$. Voyons si c'est le cas. Soit $u \in \mathcal{U}$; puisque $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$, nous avons par (1.5)

$$f(\overline{p}+u\oplus v) \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}, \overline{p}+u\oplus v - \overline{p}\rangle , \qquad \forall\, v \in \mathcal{V} ,$$

ou encore

$$f(\overline{p}+u\oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} , \qquad \forall\, v \in \mathcal{V} ,$$

qui est bien la minoration souhaitée. Cela prouve également que $L_{\mathcal{U}}(u) \neq -\infty$ pour tout $u \in \mathcal{U}$.

[(ii)] Par la Proposition 1.6 (i), p. 11, la condition d'optimalité pour $w \in W(u)$ est $0 \in \partial h_2(w) - \overline{g}_{\mathcal{V}}$ où h_2 a été définie dans la Proposition 3.2, p. 43.

Cette même proposition nous donnant l'expression de ∂h_2 , nous avons

$$w \in W(u) \;\Leftrightarrow\; 0 = g_{\mathcal{V}} - \overline{g}_{\mathcal{V}} \qquad \text{pour un certain } g \in \partial f(\overline{p}+u\oplus w) .$$

[(iii)] Pour $u = 0$, nous pouvons choisir $w = 0$ et $g = \overline{g} \in \partial f(\overline{p}+0\oplus 0)$ dans (ii).

Ceci prouve que $w = 0$ vérifie la condition d'optimalité et donc que $0 \in W(0)$. Dans ce cas, $L_{\mathcal{U}}(0) = f(\overline{p})$.

[(iv)] Puisque $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$, nous pouvons appliquer (3.5) et nous obtenons

$$\exists\, \eta > 0 \text{ tel que } \forall\, v \in \mathcal{V}\,,\ v \neq 0\,,\ h(u,v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \eta\, \|v\|_{\mathcal{V}} \quad (4.6)$$

où h est la fonction définie dans la Proposition 3.2, p. 43.

Il en résulte que

$$S_\rho := \{v \in \mathcal{V} : h(u,v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \leq \rho\} \quad \text{est compact pour tout } \rho \in I\!\!R\,.$$

En effet, soit $\rho \in I\!\!R$.

S_ρ est visiblement fermé; il est aussi borné, sinon il existerait une suite (v_n) telle que $\|v_n\| \to +\infty$ et $v_n \in S_\rho$, pour tout $n \in I\!\!N$.

Dès lors, par (4.6) et pour tout $n \in I\!\!N$,

$$\begin{aligned} f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \eta\, \|v_n\|_{\mathcal{V}} &\leq h(u,v_n) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v_n\rangle_{\mathcal{V}} \\ &\leq \rho\,. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, nous aurions alors $+\infty \leq \rho$, ce qui est absurde.

Puisque S_ρ est compact, nous pouvons affirmer que $W(u)$ est non vide pour tout $u \in \mathcal{U}$.

De plus, en $u = 0$, nous avons par (4.6)

$$h(0,v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} \geq f(\overline{p}) + \eta\, \|v\|_{\mathcal{V}}\,.$$

Or, comme $h(0,0) = f(\overline{p})$, la borne est atteinte en $v = 0$ et par conséquent, v est un minimiseur; de plus, il est unique puisque, si $v \neq 0$, alors $\|v\|_{\mathcal{V}} \neq 0$. Nous avons donc montré que $W(0) = \{0\}$. ■

Appliquons ce théorème à notre exemple 4.1.2 où nous choisissons $\overline{g} = (0,0)$. Rappelons que, dans ce cas, nous avons trouvé $L_{\mathcal{U}}(u) = \frac{1}{4}\, u^2$ et $W(u) = \left\{-\frac{1}{4}\, u^2\right\}$. Vérifions les quatre points du théorème précédent.

(i) Notre fonction $L_{\mathcal{U}}$ est évidemment convexe et à valeurs finies.

(ii) Nous avons $w \in W(u)$ si et seulement si $w = -\frac{1}{4}\, u^2$. Voyons s'il existe un $g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w) = \partial f\left(u, -\frac{1}{4}\, u^2\right)$ tel que $g_{\mathcal{V}} = \overline{g}_{\mathcal{V}} = 0$.

Par la règle de calcul donnée en 3.2.5, nous avons

$$\partial f\left(u, -\tfrac{1}{4}\, u^2\right) = \text{CO}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}\right] .$$

Dès lors, $g = \frac{1}{2}(0,-1) + \frac{1}{2}(u,1) = \left(\frac{1}{2}\, u, 0\right)$ convient.

(iii) Visiblement, nous avons $0 \in W(0)$ et $L_{\mathcal{U}}(0) = 0 = f(0,0)$.

(iv) Nous sommes bien dans le cas où $\overline{g} = (0,0) \in \operatorname{ri} \partial f(0,0)$.
$W(u)$ est non vide pour tout $u \in \mathcal{U}$ et $W(0) = \left\{-\frac{1}{4}\, 0^2\right\} = \{0\}$.

4.2 Comportement de $L_{\mathcal{U}}$ au premier ordre

Nous allons voir que le $\mathcal{U}$-Lagrangien coïncide jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p}+\mathcal{U}$, mais auparavant, nous allons montrer que $L_{\mathcal{U}}$ est différentiable en 0 et donner l'expression générale de son sous-différentiel.

Théorème 4.2

Soient une fonction f convexe et à valeurs finies, un point $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.

(i) Soit $u \in \mathcal{U}$ tel que $W(u) \neq \emptyset$. Alors, le sous-différentiel de $L_{\mathcal{U}}$ en ce point u est de la forme

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) = \left\{g_{\mathcal{U}} : g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)\right\} \tag{4.7}$$

où w est un point arbitraire dans $W(u)$.

(ii) En particulier, $L_{\mathcal{U}}$ est différentiable en 0 et $\nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}}$.

Preuve :

[(i)] Si nous utilisons à nouveau la fonction h définie dans la Proposition 3.2, p. 43, l'infimand dans (4.1) peut s'écrire comme $h(u,v) - \langle 0 \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}}, u \oplus v \rangle$.

Pour le sous-différentiel de la fonction marginale $L_{\mathcal{U}}$, le Corollaire VI 4.5.3 dans [2] nous donne alors la règle de calcul suivante :

$$\begin{aligned} s \in \partial_u L_{\mathcal{U}}(u) \quad &\Leftrightarrow \quad s \oplus 0 \in \partial_{(u,v)}(h - \langle 0 \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}}, \bullet \rangle)(u,w) \\ &\Leftrightarrow \quad s \oplus 0 \in \partial_{(u,v)} h(u,w) - 0 \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \\ &\Leftrightarrow \quad s \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial_{(u,v)} h(u,w) \end{aligned}$$

où w est un élément arbitraire de $W(u)$.

Or, la Proposition 3.2, p. 43, nous donnant l'expression de $\partial h(u,w)$, nous avons

$$s \in \partial_u L_{\mathcal{U}}(u) \quad \Leftrightarrow \quad s \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w) ,$$

ce qui démontre le premier point du théorème.

[(**ii**)] Par le Théorème 4.1 (iii), p. 50, nous savons que $0 \in W(0)$ et par conséquent, (4.7) est valable en $u = 0$ et devient

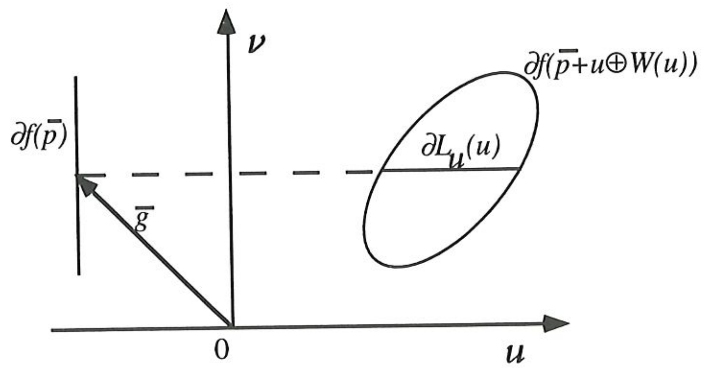
$$\partial L_{\mathcal{U}}(0) = \left\{ g_{\mathcal{U}} : g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p}) \right\} .$$

Puisque $\overline{g}_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} = \overline{g} \in \partial f(\overline{p})$, il est clair que $\partial L_{\mathcal{U}}(0)$ contient $\overline{g}_{\mathcal{U}}$.

D'autre part, par la définition 3.2.2, $\partial f(\overline{p}) \subseteq \overline{g} + \mathcal{V}$, c'est-à-dire que tous les sous-gradients de f en $\overline{p}$ ont la même $\mathcal{U}$-composante, à savoir $\overline{g}_{\mathcal{U}}$.

Dès lors, $\partial L_{\mathcal{U}}(0)$ ne contient pas d'autre élément que $\overline{g}_{\mathcal{U}}$ et donc $\partial L_{\mathcal{U}}(0) = \{\overline{g}_{\mathcal{U}}\}$, ce qui signifie bien que $L_{\mathcal{U}}$ est différentiable en 0 et que $\nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}}$. ∎

La figure ci-dessous illustre ce résultat.



En fait, le Théorème 4.2, p. 52, signifie la chose suivante :

"Pour obtenir les sous-gradients de $L_\mathcal{U}$ en u , prendre les sous-gradients g de f en $\overline{p} + u \oplus W(u)$ qui ont la même $\mathcal{V}$-composante que $\overline{g}$ (c'est-à-dire $\overline{g}_\mathcal{V}$), puis prendre leur $\mathcal{U}$-composante".

Moins formellement, nous rappelant que $\mathcal{U}$ est en fait un sous-espace de $I\!R^n$, nous pouvons aussi écrire :

$$\partial L_\mathcal{U}(u) = \Big[\partial f(\overline{p} + u \oplus W(u)) \cap (\overline{g} + \mathcal{U})\Big]_\mathcal{U} .$$

Si $\overline{g}_\mathcal{V} = 0$, cela se simplifie quelque peu :

$$\text{si } \overline{g}_\mathcal{V} = 0 , \qquad \text{alors } \partial L_\mathcal{U}(u) = \partial f(\overline{p} + u \oplus W(u)) \cap \mathcal{U} . \tag{4.8}$$

Comme nous l'avons fait pour le Théorème 4.1, p. 50, appliquons le Théorème 4.2, p. 52, à notre exemple 4.1.2 où nous choisissons cette fois $\overline{g} = (0,1)$. Dans ce cas, nous avions trouvé $L_\mathcal{U}(u) = \frac{1}{2}\, u^2$ et $W(u) = \left\{v \in I\!R : v \geq -\frac{1}{4}\, u^2\right\}$. Vérifions les deux points du théorème :

(i) Puisque notre fonction $L_\mathcal{U}$ est différentiable, nous avons

$$\partial L_\mathcal{U}(u) = \{\nabla L_\mathcal{U}(u)\} = \{u\} .$$

Pour calculer l'ensemble de droite dans (4.7) , nous devons choisir un élément arbitraire w de $W(u)$. Prenons $w = 0$. Dans ce cas,

$$\partial f(\overline{p} + u \oplus w) = \partial f(u,0) = \mathrm{CO}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et par conséquent,

$$\left\{g_\mathcal{U} : g_\mathcal{U} \oplus \overline{g}_\mathcal{V} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)\right\} = \left\{g_\mathcal{U} : g_\mathcal{U} \oplus 1 = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{u\} ,$$

ce qui montre bien que (4.7) est vérifié.

(ii) Il est évident que $L_\mathcal{U}$ est différentiable en 0 (puisqu'elle l'est partout).

D'autre part, $\nabla L_\mathcal{U}(0) = 0$ et $\overline{g}_\mathcal{U} = 0$, et donc $\nabla L_\mathcal{U}(0) = \overline{g}_\mathcal{U}$.

Comme nous l'avions déjà signalé, $L_\mathcal{U}$ **coïncide jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p} + \mathcal{U}$** . En effet, en vertu de la définition 3.2.1, pour $d \in \mathcal{U}$,

$$\max_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle = \min_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, d\rangle .$$

Dès lors, pour tout $u \in \mathcal{U}$ et en utilisant la Proposition 1.6 (iv), p. 11, nous avons

$$\begin{aligned} f'(\overline{p}; u \oplus 0) &= \max_{g \in \partial f(\overline{p})} \langle g, u \oplus 0 \rangle = \langle \overline{g}, u \oplus 0 \rangle \\ &= \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} = \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Théorème 4.2 (ii), p. 52.

Par conséquent, pour tout $u \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} f(\overline{p} + u \oplus 0) &= f(\overline{p}) + f'(\overline{p}; u \oplus 0) + o(\|u \oplus 0\|) \\ &= L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}}) \end{aligned}$$

où nous avons également utilisé le Théorème 4.1 (iii), p. 50.

Cette dernière égalité prouve bien notre assertion.

Dès lors, nous dirons que $\overline{g}_{\mathcal{U}}$ (qui est le gradient de $L_{\mathcal{U}}$ en 0) est le **$\mathcal{U}$-gradient** de f en $\overline{p}$. Remarquons que, en vertu de la Proposition 3.1 (i), p. 38, $\overline{g}_{\mathcal{U}}$ est indépendant du choix de $\overline{g}$ dans $\partial f(\overline{p})$.

Remarque 4.3

Lorsque $\|d_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}} = o(\|d_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}})$, nous avons aussi

$$f(\overline{p} + d) = f(\overline{p}) + \langle \overline{g}, d \rangle + o(\|d\|) . \tag{4.9}$$

Preuve :
Cela découle du caractère Lipschitzien de la fonction convexe f . Remarquons d'abord que, si $d = d_{\mathcal{U}} \oplus d_{\mathcal{V}}$ avec $d_{\mathcal{V}} = o(\|d_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}})$, alors $d = d_{\mathcal{U}} \oplus o(\|d_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}})$. Si nous notons $u =: d_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$, nous avons $d = u \oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}})$ et en particulier

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|d\|}{\|u\|_{\mathcal{U}}} = 1 .$$

Montrons à présent que

$$f(\overline{p} + d) - f(\overline{p}) - \langle \overline{g}, d \rangle = o(\|d\|)$$

où $d = u \oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}})$, c'est-à-dire

$$\lim_{\|d\| \to 0} \left(\frac{f(\overline{p} + d) - f(\overline{p})}{\|d\|} - \frac{\langle \overline{g}, d \rangle}{\|d\|} \right) = 0 . \tag{4.10}$$

(i) Nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|d\|\to 0} \frac{f(\overline{p}+d)-f(\overline{p})}{\|d\|} \\
&= \lim_{\|d\|\to 0} \frac{\|u\|_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \frac{f(\overline{p}+u\oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}}))-f(\overline{p})}{\|d\|} \\
&= \lim_{\|u\|_{\mathcal{U}}\to 0} \frac{f(\overline{p}\oplus u+o(\|u\|_{\mathcal{U}}))-f(\overline{p})}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{f(\overline{p}+u\oplus 0)-f(\overline{p})}{\|u\|_{\mathcal{U}}} + \lim_{u\to 0} \frac{f(\overline{p}+u\oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}}))-f(\overline{p}+u\oplus 0)}{\|u\|_{\mathcal{U}}}
\end{aligned}$$

où le second terme du membre de droite est nul puisque f est Lipschitzienne et par définition du petit o .

Si nous posons $u\oplus 0 = t\,\overline{u}\oplus 0$ avec $\|\overline{u}\|_{\mathcal{U}} = 1$ et $t>0$
de sorte que $\|u\|_{\mathcal{U}} = |t| = t$ et $u\to 0 \Leftrightarrow t \underset{>}{\to} 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{\|d\|\to 0} \frac{f(\overline{p}+d)-f(\overline{p})}{\|d\|} &= \lim_{t \underset{>}{\to} 0} \frac{f(\overline{p}+t\,\overline{u}\oplus 0)-f(\overline{p})}{t} \\
&= f'(\overline{p};\overline{u}\oplus 0)\ .
\end{aligned}$$

(ii) Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{\|d\|\to 0} \frac{\langle \overline{g}, d\rangle}{\|d\|} &= \lim_{\|d\|\to 0} \frac{\|u\|_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \frac{\langle \overline{g}, u\oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}})\rangle}{\|d\|} \\
&= \lim_{\|u\|_{\mathcal{U}}\to 0} \frac{\langle \overline{g}, u\oplus o(\|u\|_{\mathcal{U}})\rangle}{\|u\|_{\mathcal{U}}}\ .
\end{aligned}$$

Avec $u = t\,\overline{u}$ comme ci-dessus,

$$\lim_{\|d\|\to 0} \frac{\langle \overline{g}, d\rangle}{\|d\|} = \frac{\langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, t\,\overline{u}\rangle_{\mathcal{U}}}{t} + \lim_{u\to 0} \frac{\langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, o(\|u\|_{\mathcal{U}})\rangle_{\mathcal{V}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}}$$

où le second terme du membre de droite est nul par définition du petit o .

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|d\|\to 0} \frac{\langle \overline{g}, d\rangle}{\|d\|} &= \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, \overline{u}\rangle_{\mathcal{U}} \\
&= \langle \overline{g}, \overline{u}\oplus 0\rangle \\
&= f'(\overline{p};\overline{u}\oplus 0)\ .
\end{aligned}$$

(iii) Regroupant (i) et (ii), nous voyons que (4.10) est vérifié. ∎

Cette remarque nous sera utile lorsque nous considérerons des ordres supérieurs; nous devrons alors sélectionner d de manière appropriée pour permettre une spécification du reste dans (4.9). Nous verrons également que les d de la forme $u \oplus W(u)$ joueront un rôle particulier.

Le Théorème 4.2, p. 52, prouve l'existence de $\nabla L_{\mathcal{U}}(0)$. Celle-ci est extrêmement importante puisqu'elle supprime une difficulté mentionnée dans l'introduction. En effet, le quotient différentiel (0.1), p. 5, s'écrit à présent sous la forme

$$\frac{\partial L_{\mathcal{U}}(u) - \overline{g}_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}}$$

qui a cette fois un sens.

Voyons à présent une première conséquence de ce fait.

Corollaire 4.4

Soient une fonction f convexe à valeurs finies, un point $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$. Alors,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, \delta > 0 : \quad \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \ \Rightarrow\ \|w\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon\ \|u\|_{\mathcal{U}}\ , \quad \forall\, w \in W(u)\ .$$

Preuve :

Soient $\varepsilon > 0$ et $w \in W(u)$.

Utilisant les Théorèmes 4.1 (iii), p. 50, et 4.2 (ii), p. 52, nous pouvons écrire le développement du premier ordre de $L_{\mathcal{U}}$:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{U}}(u) &= L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}}) \\ &= f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}})\ . \end{aligned}$$

Pour tout $w \in W(u)$, nous avons

$$L_{\mathcal{U}}(u) = f(\overline{p} + u \oplus w) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w\rangle_{\mathcal{V}}\ ;$$

dès lors (puisque $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$), si nous écrivons (3.5) avec $v = w$, nous obtenons

$$L_{\mathcal{U}}(u) \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \eta\ \|w\|_{\mathcal{V}}\ , \qquad \text{pour } \eta > 0\ .$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} o(\|u\|_{\mathcal{U}}) &= L_{\mathcal{U}}(u) - f(\overline{p}) - \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} \\ &\geq \eta \, \|w\|_{\mathcal{V}} \, , \end{aligned}$$

ou encore

$$\eta \, \|w\|_{\mathcal{V}} \leq b \text{ où } b = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) \, ,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{u \to 0} \frac{b}{\|u\|_{\mathcal{U}}} = 0 \, .$$

Par définition de cette dernière limite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \leq \eta \, \varepsilon \, .$$

Dès lors, nous avons bien trouvé un $\delta > 0$ tel que

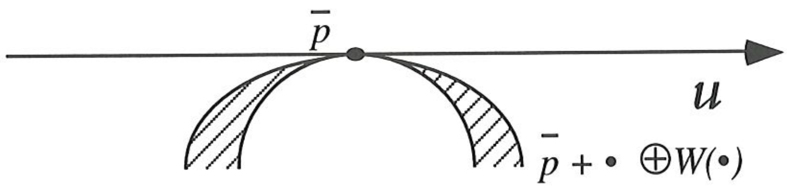
$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad \eta \, \|w\|_{\mathcal{V}} \leq \eta \, \varepsilon \, \|u\|_{\mathcal{U}} \, ,$$

c'est-à-dire $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \Rightarrow \|w\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \, \|u\|_{\mathcal{U}}$. ■

Remarque 4.5

Synthétisons les résultats obtenus jusqu'ici.

Étant donné $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$, nous avons défini en (4.1) une fonction convexe $L_{\mathcal{U}}$, appelée $\mathcal{U}$-Lagrangien, qui est différentiable en 0 et coïncide jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p} + \mathcal{U}$. Lorsque $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$, ce $\mathcal{U}$-Lagrangien est en réalité la restriction de f à une "grosse surface" $\{\overline{p} + \bullet \oplus W(\bullet)\}$, paramétrisée par $u \in \mathcal{U}$ et "tangente" à $\mathcal{U}$ en $\overline{p}$, comme le suggère la figure ci-dessous.



De plus, lorsque nous prenons les sous-gradients de f en $\overline{p} + u \oplus W(u)$ qui ont la même $\mathcal{V}$-composante que $\overline{g}$, nous obtenons le sous-différentiel de $L_{\mathcal{U}}$ en u .

4.3 Comportement de $L_{\mathcal{U}}$ au second ordre

Nous venons de voir que $L_{\mathcal{U}}$ coïncidait jusqu'au premier ordre avec la restriction de f à $\overline{p}+\mathcal{U}$. Envisageons à présent comment le $\mathcal{U}$-Lagrangien se comporte au second ordre, et pour cela, étudions le comportement de $\partial L_{\mathcal{U}}$ au voisinage de 0 . À cet effet, nous introduisons la définition suivante :

Définition 4.6

Nous dirons que la fonction f a un **sous-différentiel radialement Lipschitzien en** $\overline{p}$ lorsqu'il existe un $D>0$ et un $\delta>0$ tels que

$$\partial f(\overline{p}+d) \subseteq \partial f(\overline{p}) + B(0, D\ \|d\|)\ , \qquad \forall\ d \in B(0,\delta)\ . \tag{4.11}$$

En vertu du Corollaire 2.6, p. 29, cette condition est équivalente à ce qu'il existe un $C>0$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$f(\overline{p}+d) \leq f(\overline{p}) + f'(\overline{p};d) + \tfrac{C}{2}\ \|d\|^2\ , \qquad \forall\ d \in B(0,\varepsilon)\ . \tag{4.12}$$

Nous allons voir à présent que cette propriété se transmet de f à $L_{\mathcal{U}}$.

Proposition 4.7

Soient une fonction f convexe à valeurs finies, $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$. Supposons que $W(u)$ soit non vide pour u suffisamment petit et que f vérifie (4.11) = (4.12).
Alors,

(i) il existe un $\delta>0$ tel que

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) \subseteq \overline{g}_{\mathcal{U}} + B_{\mathcal{U}}(0, 2\ C\ \|u\|_{\mathcal{U}})\ , \qquad \forall\ u \in B_{\mathcal{U}}(0,\delta)\ ;$$

(ii) il existe un $\rho>0$ et un $R>0$ tels que

$$L_{\mathcal{U}}(u) \leq L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ R\ \|u\|^2_{\mathcal{U}}\ , \quad \forall\ u \in B_{\mathcal{U}}(0,\rho)\ .$$

Preuve :

[(i)] Soit un élément $g_{\mathcal{U}}$ arbitraire dans $\partial L_{\mathcal{U}}(u)$. Montrons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $g_{\mathcal{U}} \in \overline{g}_{\mathcal{U}} + B_{\mathcal{U}}(0, 2\,C\,\|u\|_{\mathcal{U}})$ pour tout $u \in B_{\mathcal{U}}(0,\delta)$.

Puisque $L_{\mathcal{U}}$ est convexe, en vertu du Théorème VI 6.2.4 dans [2] et avec le ε de (4.12), nous savons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$u \in B_{\mathcal{U}}(0,\delta) \quad \Rightarrow \quad \partial L_{\mathcal{U}}(u) \subseteq \nabla L_{\mathcal{U}}(0) + B_{\mathcal{U}}\left(0, \tfrac{\varepsilon\,C}{2}\right) .$$

Or, par le Théorème 4.2 (ii), p. 52, $\nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}}$, et puisque $g_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}(u)$, nous avons

$$u \in B_{\mathcal{U}}(0,\delta) \quad \Rightarrow \quad g_{\mathcal{U}} \in \overline{g}_{\mathcal{U}} + B_{\mathcal{U}}\left(0, \tfrac{\varepsilon\,C}{2}\right) ,$$

ou encore

$$u \in B_{\mathcal{U}}(0,\delta) \quad \Rightarrow \quad \|g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} \leq \tfrac{\varepsilon\,C}{2} .$$

D'autre part, supposons que δ soit assez petit pour que $W(u)$ contienne un certain w ; alors, par le Théorème 4.1 (ii), p. 50, $g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$.

Nous allons à présent appliquer le Corollaire 2.4, p. 27, avec la fonction f , $z_0 = \overline{p}$, $g_0 = \overline{g}$, $x := \overline{p} + u \oplus w$ et $s := (g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0$. Vérifions si les hypothèses de ce corollaire sont satisfaites ici.

La fonction f , puisqu'elle vérifie (4.12), remplit les conditions de ce corollaire.

Nous avons également $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$. Voyons si $s \in N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g}) \cap B\left(0, \tfrac{\varepsilon\,C}{2}\right)$.

Nous venons de montrer que, pour $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta$, $\|g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} \leq \tfrac{\varepsilon\,C}{2}$; par conséquent, $(g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0 = s \in B\left(0, \tfrac{\varepsilon\,C}{2}\right)$.

D'autre part, $(g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0 = s \in \mathcal{U}$ qui, par la Proposition 3.1 (iii), p. 38, est inclus dans $N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g})$. Dès lors, s est bien dans $N_{\partial f(\overline{p})}(\overline{g}) \cap B\left(0, \tfrac{\varepsilon\,C}{2}\right)$. Il reste à voir si $x \in \partial f^*(\overline{g} + s)$.

Or, $g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$, ce qui, par la Proposition 1.6 (ii), p. 11, implique que

$$\begin{aligned} x \;=\; \overline{p} + u \oplus w \in \partial f^*(g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}}) &= \partial f^*(\overline{g}_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} + (g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0) \\ &= \partial f^*(\overline{g} + s) . \end{aligned}$$

Le Corollaire 2.4, p. 27, nous permet donc d'affirmer que

$$\langle s, x - \overline{p} \rangle \geq \frac{\|s\|^2}{2\,C} ,$$

c'est-à-dire

$$\langle (g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0, \overline{p} + u \oplus w - \overline{p} \rangle \quad \geq \quad \frac{\|(g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}) \oplus 0\|^2}{2\,C} ,$$

ou encore

$$\langle g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} \quad \geq \quad \frac{\|g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}}^2}{2\,C} .$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} \leq \|g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} \, \|u\|_{\mathcal{U}} ,$$

et par conséquent

$$\|g_{\mathcal{U}} - \overline{g}_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} \leq 2\,C\, \|u\|_{\mathcal{U}} ,$$

ou encore

$$g_{\mathcal{U}} \in \overline{g}_{\mathcal{U}} + B_{\mathcal{U}}(0, 2\,C\, \|u\|_{\mathcal{U}}) ,$$

et (i) est vérifié.

[**(ii)**] Par le Corollaire 2.6, p. 29, nous savons que (ii) est équivalent à (i). ■

Grâce au Théorème 4.2, p. 52, nous pouvons revenir à la fonction f et exprimer la Proposition 4.7 (iv), p. 59, comme suit :

Pour u petit dans $\mathcal{U}$ et pour tout $w \in W(u)$, nous avons

$$\left\{ g_{\mathcal{U}} : g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w) \right\} \subseteq \overline{g}_{\mathcal{U}} + B_{\mathcal{U}}(0, 2\,C\, \|u\|_{\mathcal{U}})$$

et

$$f(\overline{p} + u \oplus w) \leq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}, u \oplus w \rangle + \tfrac{1}{2}\, R\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 .$$

Nous sommes à présent prêts à introduire une nouvelle notion, celle du $\mathcal{U}$-Hessien.

Définitions 4.8

- Une fonction convexe ϕ admet un **Hessien généralisé** $H\phi(z_0)$ en z_0 lorsque
  - (i) le gradient $\nabla\phi(z_0)$ existe;
  - (ii) il existe un opérateur $H\phi(z_0)$, symétrique et semi-défini positif tel que

$$\phi(z_0 + d) = \phi(z_0) + \langle \nabla\phi(z_0), d \rangle + \tfrac{1}{2}\, \langle H\phi(z_0) d, d \rangle + o(\|d\|^2) \; ; \qquad (4.13)$$

(iii) ou de manière équivalente,

$$\partial\phi(z_0 + d) \subseteq \nabla\phi(z_0) + H\phi(z_0)\ d + B(0, o(\|d\|))\ . \tag{4.14}$$

- Soient f une fonction convexe à valeurs finies, $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$.

  Nous dirons que f admet un **$\mathcal{U}$-Hessien** $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ en $\overline{p}$ (associé à $\overline{g}$) si $L_{\mathcal{U}}$ admet un Hessien généralisé en 0 et, dans ce cas, nous poserons

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) := HL_{\mathcal{U}}(0)\ . \tag{4.15}$$

Lorsqu'il existe, le $\mathcal{U}$-Hessien $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ est dès lors un opérateur symétrique et semi-défini positif de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$. En vertu de (4.13), si $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ existe, nous avons le développement suivant pour $u \in \mathcal{U}$ et $w \in W(u)$ (supposé non vide ce qui, par le Théorème 4.1 (iv), p. 50, est le cas lorsque $\overline{g} \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$) :

$$L_{\mathcal{U}}(u) = L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ \langle HL_{\mathcal{U}}(0)\ u, u\rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}}^2)\ ,$$

c'est-à-dire, puisque $L_{\mathcal{U}}(0) = f(\overline{p})$ et $\nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}}$,

$$\begin{aligned} & f(\overline{p} + u \oplus w) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w\rangle_{\mathcal{V}} \\ &\quad = \quad f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ \langle H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\ u, u\rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}}^2)\ , \end{aligned}$$

ou encore

$$f(\overline{p} + u \oplus w) = f(\overline{p}) + \langle \overline{g}, u \oplus w\rangle + \tfrac{1}{2}\ \langle H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\ u, u\rangle_{\mathcal{U}} + o(\|u\|_{\mathcal{U}}^2)\ . \tag{4.16}$$

D'après (4.14), nous avons également

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) \subseteq \nabla L_{\mathcal{U}}(0) + HL_{\mathcal{U}}(0)\ u + B_{\mathcal{U}}(0, o(\|u\|_{\mathcal{U}}))\ , \tag{4.17}$$

c'est-à-dire, par le Théorème 4.2, p. 52,

$$\left\{ g_{\mathcal{U}} : g_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w) \right\} \subseteq \overline{g}_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\ u + B_{\mathcal{U}}(0, o(\|u\|_{\mathcal{U}}))\ .$$

Chapitre 5

Deux applications de la $\mathcal{U}$-théorie

5.1 Pénalité exacte

Pourquoi avoir appelé $\mathcal{U}$-**Lagrangien** la fonction définie en (4.1) ?

Simplement parce que, dans certains cas particuliers, ce $\mathcal{U}$-Lagrangien coïncide (au moins jusqu'au second ordre) avec le Lagrangien ordinaire. Nous verrons que c'est le cas ici, pour une fonction de pénalité exacte.

5.1.1 Position du problème

Considérons un problème général de programmation non linéaire

$$\begin{cases} \min \psi(p) \\ \text{sous les contraintes } f_i(p) \le 0\,, \qquad i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\psi, f_1, \cdots, f_m$ sont des fonctions convexes de classe C^2 .

Pour $(p, \lambda) \in I\!R^n \times I\!R^m$, le **Lagrangien ordinaire** est

$$L(p, \lambda) := \psi(p) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ f_i(p)\ .$$

Soit $\overline{p}$ un point optimal de (5.1) et supposons que les conditions de Kuhn-Tucker soient vérifiées en $\overline{p}$, c'est-à-dire qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange $\overline{\lambda}_i$ tels que

$$\begin{cases} \nabla_p L(\overline{p}, \overline{\lambda}) = \nabla\psi(\overline{p}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \ \nabla f_i(\overline{p}) = 0\,, \\ \\ \overline{\lambda}_i \ge 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lambda}_i \ f_i(\overline{p}) = 0\,, \quad \forall\, i = 1, \cdots, m\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

Dorénavant, pour alléger l'écriture, nous noterons

$$\gamma := \nabla\psi\,, \qquad g_i := \nabla f_i\,, \qquad \overline{\gamma} := \nabla\psi(\overline{p}) \qquad \text{et} \qquad \overline{g}_i := \nabla f_i(\overline{p})\,. \tag{5.3}$$

Considérons à présent une fonction de pénalité exacte associée au problème (5.1) : avec $f_0(p) \equiv 0$ (et par conséquent $g_0(p) := \nabla f_0(p) \equiv 0$), posons

$$f(p) = \psi(p) + \pi \;\max\Big\{f_0(p), f_1(p), \cdots, f_m(p)\Big\}\,, \tag{5.4}$$

où $\pi > 0$ est un paramètre de pénalité.

Soit $J(p)$ l'ensemble des indices réalisant le maximum en p , c'est-à-dire

$$J(p) := \Big\{j \in \{0, \cdots, m\} : \psi(p) + \pi\; f_j(p) = f(p)\Big\}\,.$$

Calculons, à l'aide des règles usuelles, le sous-différentiel de f au point p :

$$\partial f(p) = \gamma(p) + \pi\;\; \mathrm{CO}\;\Big\{g_j(p) : j \in J(p)\Big\}\,. \tag{5.5}$$

Soit $\overline{I} := \{i \in \{1, \cdots, m\} : f_i(\overline{p}) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives en $\overline{p}$. $\overline{I}$ est supposé non vide, sinon le problème manque d'intérêt. Nous avons immédiatement

$$J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}\,. \tag{5.6}$$

Nous allons associer à $J(\overline{p})$ les "multiplicateurs"

$$\overline{\mu}_i := \overline{\lambda}_i \quad \text{pour } i \in \overline{I} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mu}_0 : \pi - \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\lambda}_i\,. \tag{5.7}$$

Pour π suffisamment grand, nous savons que, si $\overline{p}$ résout (5.1), il minimise aussi la fonction f de (5.4).

Nous allons à présent appliquer la théorie du Chapitre 4 au cas suivant :

f est la fonction de pénalité exacte de (5.4) , $\overline{p}$ est optimal et $\overline{g} = 0$.

Comme nous l'avons déjà dit, nous montrerons que le $\mathcal{U}$-Lagrangien $L_{\mathcal{U}}$ coïncide jusqu'au second ordre avec la restriction à $\mathcal{U}$ du Lagrangien ordinaire $L(\overline{p}+\,\bullet, \overline{\lambda})$.

Ce qui suit étant uniquement considéré comme une illustration de la $\mathcal{U}$-théorie, nous nous permettons de faire les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les gradients des contraintes actives en $\overline{p}$, $\{\overline{g}_i\}_{i \in \overline{I}}$, sont linéairement indépendants (ce qui implique que $\overline{\lambda}$ dans (5.2) est unique);
- $\overline{\lambda}_i > 0$ pour $i \in \overline{I}$ (complémentarité stricte);
- $\pi > \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\lambda}_i$, c'est-à-dire $\overline{\mu}_0 > 0$ dans (5.7).

5.1.2 Propriétés

La première proposition de ce paragraphe établit entre autres que $\mathcal{U}$ est l'espace tangent à la surface définie par les contraintes actives.

Proposition 5.1

Avec les notations et les hypothèses du §5.1.1, les relations suivantes sont vérifiées pour $p = \overline{p}$:

(i) $\partial f(\overline{p}) = \overline{\gamma} + \left\{ \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \, \overline{g}_i : \mu_i \geq 0 \; , \; \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \leq \pi \right\}$;

(ii) les sous-espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ du Chapitre 3 sont

$$\mathcal{V} = \operatorname{span}\{\overline{g}_i : i \in \overline{I}\} \qquad et \qquad \mathcal{U} = \left\{ d \in I\!R^n : \langle \overline{g}_i, d\rangle = 0 \; , \; i \in \overline{I} \right\} ;$$

(iii) $\overline{g} := 0 \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$.

Preuve :

[**(i)**] Par (5.5), nous avons

$$\partial f(\overline{p}) = \overline{\gamma} + \pi \;\; \mathrm{CO} \left\{ \overline{g}_i : i \in J(\overline{p}) \right\} ,$$

ou encore, en vertu de (5.6),

$$\begin{aligned} \partial f(\overline{p}) &= \overline{\gamma} + \pi \;\; \mathrm{CO} \left\{ \overline{g}_i : i \in \overline{I} \cup \{0\} \right\} \\ &= \overline{\gamma} + \left\{ \pi \; \alpha_0 \; \overline{g}_0 + \sum_{i\in\overline{I}} \pi \; \alpha_i \; \overline{g}_i : \alpha_i \geq 0 \; , \; \alpha_0 + \sum_{i\in\overline{I}} \alpha_i = 1 \right\} . \end{aligned}$$

Posons $\mu_i := \pi \; \alpha_i \geq 0$; nous avons

$$\alpha_0 + \sum_{i\in\overline{I}} \alpha_i = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i\in\overline{I}} \alpha_i \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \leq \pi$$

et par conséquent, nous souvenant du fait que $\overline{g}_0 \equiv 0$, nous obtenons

$$\partial f(\overline{p}) = \overline{\gamma} + \left\{ \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \; \overline{g}_i : \mu_i \geq 0 \; , \; \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \leq \pi \right\} .$$

[(ii)] Par (i), nous voyons que $\overline{\gamma} \in \partial f(\overline{p})$. Dès lors, appliquant la définition 3.2.2, nous avons

$$\mathcal{V} = \text{span}\ \{\partial f(\overline{p}) - \overline{\gamma}\}\ ,$$

c'est-à-dire, en vertu de (i),

$$\mathcal{V} = \text{span}\ \{\overline{g}_i : i \in \overline{I}\}\ .$$

Et, puisque $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\perp}$, nous avons

$$\mathcal{U} = \left\{ d \in I\!R^n : \langle \overline{g}_i, d\rangle = 0\ ,\ i \in \overline{I} \right\} .$$

[(iii)] Afin de prouver que $\overline{g} := 0 \in \text{ri}\,\partial f(\overline{p})$, nous allons montrer que $\partial f(\overline{p})$ contient un voisinage relatif de $\overline{g} = 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{B}$ suivant :

$$\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i\ \overline{g}_i : \mu_i \geq -\overline{\mu}_i\ ,\ \forall\ i \in \overline{I}\ ,\ \sum_{i\in\overline{I}} \mu_i \leq \overline{\mu}_0 \right\}\ ,$$

où $\overline{\mu}$ a été défini en (5.7).

Remarquons que

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ (par (ii));
- $0 \in \mathcal{B}$ (il suffit de choisir $\mu_i = 0\ ,\ \forall\ i \in \overline{I}$);
- $\mathcal{B}$ est convexe (cela découle immédiatement de la définition);
- $\overline{\mu}_0\ \overline{g}_i \in \mathcal{B}\ ,\ \forall\ i \in \overline{I}$ (puisque $\overline{\mu}_0 \geq -\overline{\mu}_i\ \ \forall\ i \in \overline{I}$ car $\overline{\mu}_0 > 0$ et $\overline{\mu}_i \geq 0$);
- $-\overline{\mu}_i\ \overline{g}_i \in \mathcal{B}\ ,\ \forall\ i \in \overline{I}$ (puisque $-\overline{\mu}_i \leq \overline{\mu}_0$).

Par conséquent,

$$\mathcal{B} \supseteq \mathcal{C} := \text{CO}\{\overline{\mu}_0\ \overline{g}_i\ ,\ -\overline{\mu}_i\ \overline{g}_i\ ,\ \forall\ i \in \overline{I}\}\ .$$

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est un voisinage relatif de $\overline{g} = 0$, il nous suffit donc de prouver que $0 \in \text{ri}\,\mathcal{C}$. Utilisons pour cela le Théorème 6.4 dans [6] qui nous fournit la caractérisation suivante :

$$0 \in \text{ri}\,\mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ x \in \mathcal{C}\ ,\ \exists\ \mu > 1 \text{ tel que } (1-\mu)\ x \in \mathcal{C}\ .$$

Or, $\mu = 2$ convient, puisque si $x \in \mathcal{C}$, alors $-x \in \mathcal{C}$.

Dès lors, $\mathcal{B}$ est un voisinage relatif de 0 et il nous reste à montrer que $\mathcal{B} \subseteq \partial f(\overline{p})$.

Or, en vertu de (5.2),

$$\begin{cases} \overline{\gamma} + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \, \overline{g}_i = 0 \,, \\ \overline{\lambda}_i = 0 \,, \quad \forall \, i \notin \overline{I} \,, \end{cases}$$

c'est-à-dire, par (5.7),

$$\overline{\gamma} + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\lambda}_i \, \overline{g}_i = \overline{\gamma} + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\mu}_i \, \overline{g}_i = 0 \,.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \overline{\gamma} + \mathcal{B} + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\mu}_i \, \overline{g}_i \\ &= \overline{\gamma} + \left\{ \sum_{i \in \overline{I}} (\mu_i + \overline{\mu}_i) \, \overline{g}_i : \mu_i + \overline{\mu}_i \geq 0 \,, \, \forall \, i \in \overline{I} \,, \, \sum_{i \in \overline{I}} (\mu_i + \overline{\mu}_i) \leq \overline{\mu}_0 + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{\mu}_i = \pi \right\} \end{aligned}$$

et nous concluons finalement par (i) que $\mathcal{B} \subseteq \partial f(\overline{p})$. ∎

Lemme 5.2

Avec les notations du §5.1.1, soit p un point proche de $\overline{p}$.
Alors, $J(p) \subseteq J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}$ et le système en $(\mu_j)_{j \in J(p)}$

$$\begin{cases} \langle \overline{g}_i, \gamma(p) \rangle + \sum_{j \in J(p)} \mu_j \, \langle \overline{g}_i, g_j(p) \rangle = 0 \,, \quad \forall \, i \in \overline{I} \,, \\ \sum_{j \in J(p)} \mu_j = \pi \,, \end{cases} \tag{5.8}$$

possède une solution, qui est unique si et seulement si

$$J(p) = J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\} \,.$$

De plus, la solution $\mu(p)$ vérifie $\mu_j(p) > 0$ pour tout $j \in J(p) = J(\overline{p})$.
Par ailleurs, $\mu(\overline{p}) = \overline{\mu}$ de (5.7) et l'application $p \mapsto \mu(p)$ est différentiable en $p = \overline{p}$.

Preuve :

- Commençons par montrer que $J(p) \subseteq J(\overline{p})$.

  Soit $j \notin J(\overline{p})$, c'est-à-dire $f_j(\overline{p}) < f_i(\overline{p})$ pour tout $i \in J(\overline{p})$.

  Dès lors, par la continuité de f et puisque p est proche de $\overline{p}$, nous avons $f_j(p) < f_i(p)$ pour tout $i \in J(\overline{p})$, c'est-à-dire $j \notin J(p)$.

- Considérons à présent le système (5.8) et remarquons que $\overline{\mu}$ de (5.7) est une solution en $p = \overline{p}$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \langle \overline{g}_i, \overline{\gamma} \rangle + \sum_{j \in J(\overline{p})} \overline{\mu}_j \, \langle \overline{g}_i, \overline{g}_j \rangle = 0 \, , & \forall \, i \in \overline{I} \, , \\ \\ \sum_{j \in J(\overline{p})} \overline{\mu}_j = \pi \, . \end{cases}$$

En effet, par (5.2), nous avons

$$\overline{\gamma} + \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j \, \overline{g}_j = 0 \, .$$

Or, pour $j \notin \overline{I}$, $\overline{\lambda}_j = 0$ et nous avons donc

$$\overline{\gamma} + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\lambda}_j \, \overline{g}_j = 0 \, .$$

Si nous calculons le produit scalaire avec $\overline{g}_i$, $i \in \overline{I}$, nous obtenons

$$\langle \overline{g}_i, \overline{\gamma} \rangle + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\lambda}_j \, \langle \overline{g}_i, \overline{g}_j \rangle = 0 \, , \qquad \forall \, i \in \overline{I} \, .$$

Mais, par (5.7), $\overline{\mu}_j = \overline{\lambda}_j$ pour $j \in \overline{I}$, et, par (5.6), $J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}$.

Dès lors, puisque $\overline{g}_0 = 0$, nous avons

$$\langle \overline{g}_i, \overline{\gamma} \rangle + \sum_{j \in J(\overline{p})} \overline{\mu}_j \, \langle \overline{g}_i, \overline{g}_j \rangle = 0 \, , \qquad \forall \, i \in \overline{I} \, ,$$

et la première équation du système est vérifiée. D'autre part, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(\overline{p})} \overline{\mu}_j \; &= \; \sum_{j \in \overline{I} \cup \{0\}} \overline{\mu}_j \; = \; \overline{\mu}_0 + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\mu}_j \\ &= \; \overline{\mu}_0 + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\lambda}_j \; = \; \pi \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de (5.7). $\overline{\mu}$ vérifie donc la deuxième équation du système (5.8).

- Supposons maintenant que $J(p) = J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}$ et montrons que (5.8) a une solution unique possédant les propriétés requises. Puisque $J(p) = \overline{I} \cup \{0\}$, nous pouvons écrire le système (5.8) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \langle \overline{g}_i, \gamma(p) \rangle + \mu_0(p) \ \langle \overline{g}_i, g_0(p) \rangle + \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(p) \ \langle \overline{g}_i, g_j(p) \rangle = 0 \ , \quad \forall\, i \in \overline{I} \ , \\ \\ \mu_0(p) + \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(p) = \pi \ . \end{cases}$$

Puisque $g_0(p) \equiv 0$, la variable μ_0 est donnée directement par $\mu_0(p) = \pi - \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(p)$. En ce qui concerne les μ_j , $j \in \overline{I}$, ils sont donnés par un système linéaire de dimension $\overline{I} \times \overline{I}$ dont la matrice est $E := (\langle \overline{g}_i, g_j(p) \rangle)_{ij}$. Montrons que E est une matrice définie positive, c'est-à-dire que

$$\forall\, d \text{ tel que } \|d\| = 1 \ , \qquad d^T \ E \ d > 0 \ .$$

Soit d un vecteur de norme unité. Décomposons E de la manière suivante :

$$d^T \ E \ d = d^T \ (D(p) + C) \ d = d^T \ D(p) \ d + d^T \ C \ d$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad D(p) \quad &= \quad (\langle \overline{g}_i, g_j(p) - \overline{g}_j \rangle)_{ij} \ , \\ C \quad &= \quad (\langle \overline{g}_i, \overline{g}_j \rangle)_{ij} \ . \end{aligned}$$

a) Nous avons $d^T \ C \ d = d^T \ A^T \ A \ d = \|A \ d\|_2^2$ où $A = (\overline{g}_1, \cdots, \overline{g}_m)$.
Or, puisque les colonnes de A sont linéairement indépendantes et que $d \neq 0$, nous avons $A \ d \neq 0$ et donc $\|A \ d\|_2^2 > 0$. Par conséquent, une propriété du quotient de Rayleigh nous permet d'écrire

$$d^T \ C \ d \geq \alpha \ \|d\|^2 = \alpha > 0$$

où α est la plus petite valeur propre de C .

b) D'autre part, $D(p) = A^T \ (B(p) - A)$ où $B(p) = (g_1(p), \cdots, g_m(p))$. Or,

$$\begin{aligned} |d^T \ D(p) \ d| \ &\leq \ \|d\| \ \|D(p) \ d\| \ \leq \ \|d\|^2 \ \|D(p)\|_2 \ = \ \|D(p)\|_2 \\ &= \ \|A^T \ (B(p) - A)\|_2 \ \leq \ \|A^T\|_2 \ \|B(p) - A\|_2 \ < \ \alpha \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que p est proche de $\overline{p}$ et donc que $\|B(p) - A\|_2 \to 0$.
Par conséquent, nous avons

$$d^T \ D(p) \ d > -\alpha \ .$$

c) Par (a) et (b), nous obtenons finalement

$$d^T\ E\ d = d^T\ D(p)\ d + d^T\ C\ D > \alpha + (-\alpha) = 0\ .$$

Puisque la matrice E est définie positive, la solution $\mu(p)$ du système (5.8) est unique et proche de $\overline{\mu}$ puisque p est proche de $\overline{p}$; par conséquent, puisque $\overline{\mu} > 0$ et $\overline{\mu}_0 > 0$, nous avons $\mu(p) > 0$ et $\sum_{i\in\overline{I}} \mu_i(p) < \pi$, c'est-à-dire $\mu_0(p) > 0$.

En particulier, puisque nous avons montré que $\overline{\mu}$ est solution de (5.8) en $p = \overline{p}$, elle est unique : $\mu(\overline{p}) = \overline{\mu}$. Les propriétés de différentiabilité de $\mu(\bullet)$ découlent alors du Théorème des fonctions implicites.

- Supposons pour terminer que (5.8) a une solution unique strictement positive et montrons que $J(p) = J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}$. Puisque nous avons toujours $J(p) \subseteq J(\overline{p})$, supposons par l'absurde que $J(\overline{p}) \not\subseteq J(p)$, c'est-à-dire que $I_0 := J(\overline{p}) \setminus J(p) \neq \emptyset$. Par hypothèse, (5.8) possède une solution $(\mu_j^*)_{j\in J(p)}$. Si nous posons $\mu_j^* = 0$ pour $j \in I_0$, μ^* est également solution de (5.8) avec $J(p)$ remplacé par $J(\overline{p})$. En effet, d'une part nous avons

$$\sum_{j\in J(p)} \mu_j^* = \pi \qquad \text{et} \qquad \mu_j^* = 0\ , \quad \forall\, j \in I_0\ ;$$

par conséquent, $\sum_{j\in J(\overline{p})} \mu_j^* = \pi$. D'autre part,

$$\langle \overline{g}_i, \gamma(p)\rangle\ +\ \sum_{j\in J(p)} \mu_j^*\ \langle \overline{g}_i, g_j(p)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \mu_j^* = 0\ , \quad \forall\, j \in I_0\ ,$$

et dès lors, $\langle \overline{g}_i, \gamma(p)\rangle + \sum_{j\in J(\overline{p})} \mu_j^*\ \langle \overline{g}_i, g_j(p)\rangle = 0$, pour tout $i \in \overline{I}$.

Nous avons donc trouvé une solution μ_j^* de (5.8) telle que $\mu_j^* = 0$ pour $j \in I_0$, ce qui contredit notre hypothèse. ∎

Le résultat ci-dessous donne une belle interprétation du $W(\bullet)$ de (4.2) : il fournit une description locale de la surface définie par les contraintes actives.

Théorème 5.3

Avec les notations du §5.1.1, pour u suffisamment petit dans $\mathcal{U}$, $W(u)$ défini en (4.2) est un singleton $\{w(u)\}$ qui est l'unique solution du système en $v \in \mathcal{V}$ ci-dessous :

$$f_i(\overline{p} + u \oplus v) = 0\ , \qquad \forall\, i \in \overline{I}\ . \tag{5.9}$$

De plus, $w(\bullet)$ est différentiable dans un voisinage de 0 et $w(0) = 0$.

Preuve :

Commençons par montrer que, pour tout $p \in \overline{p} + u \oplus W(u)$, $\partial f(p) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Soit $p \in \overline{p} + u \oplus W(u)$, c'est-à-dire $p = \overline{p} + u \oplus w$ avec $w \in W(u)$. En vertu du Théorème 4.1 (ii), p. 50, puisque $w \in W(u)$, il existe un $g \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$ tel que $g_{\mathcal{V}} = \overline{g}_{\mathcal{V}}$, c'est-à-dire, comme $\overline{g} \equiv 0$, qu'il existe un $g \in \partial f(p)$ tel que $g_{\mathcal{V}} = 0$, ce qui signifie que $g \in \mathcal{U}$. Par conséquent, nous avons $g \in \partial f(p) \cap \mathcal{U}$.

Dès lors, par (5.5), il existe des multiplicateurs $(\alpha_j)_{j \in J(p)}$, $\alpha_j \geq 0$, et $\sum_{j \in J(p)} \alpha_j = 1$ tels que

$$\gamma(p) + \pi \sum_{j \in J(p)} \alpha_j \; g_j(p) \in \mathcal{U} \, .$$

Si nous posons $\mu_j := \pi \; \alpha_j$, nous avons donc

$$\begin{cases} \gamma(p) + \sum_{j \in J(p)} \mu_j \; g_j(p) \in \mathcal{U} \, , \\ \\ \sum_{j \in J(p)} \mu_j = \pi \sum_{j \in J(p)} \alpha_j = \pi \, . \end{cases}$$

Mais, par la Proposition 5.1 (ii), p. 65, $(\overline{g}_i)_{i \in \overline{I}} \subseteq \mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp}$ et donc

$$\begin{cases} \langle \overline{g}_i, \gamma(p) \rangle + \sum_{j \in J(p)} \mu_j \; \langle \overline{g}_i, g_j(p) \rangle = 0 \, , \quad \forall \, i \in \overline{I} \, , \\ \\ \sum_{j \in J(p)} \mu_j = \pi \, , \end{cases}$$

ce qui signifie que $(\mu_j)_{j \in J(p)}$ est une solution positive du système (5.8).

Par conséquent, si nous montrons que p est proche de $\overline{p}$, nous pourrons appliquer le Lemme 5.2, p. 67, et conclure que $J(p) = J(\overline{p}) = \overline{I} \cup \{0\}$. Or, comme $\overline{g} \equiv 0 \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$ par la Proposition 5.1 (iii), p. 65, nous pouvons déduire du Corollaire 4.4, p. 57, que

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, , \, \exists \, \delta > 0 : \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \; \Rightarrow \; \|w\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \; \|u\|_{\mathcal{U}} \, , \quad \forall \, w \in W(u) \, .$$

Mais, puisque $p - \overline{p} = u \oplus w$, nous avons $\|p - \overline{p}\|^2 = \|u\|^2_{\mathcal{U}} + \|w\|^2_{\mathcal{V}}$, qui peut être rendu aussi petit qu'on le désire, et par conséquent, p est proche de $\overline{p}$.

Nous avons dès lors

$$J(p) = \overline{I} \cup \{0\} \, ,$$

c'est-à-dire, pour tout $i \in \overline{I} \cup \{0\}$,

$$\psi(p) + \pi \; f_i(p) = f(p) \, ,$$

ou encore, pour tout $i \in \overline{I} \cup \{0\}$,

$$f_i(p) = \max \left\{ f_0(p), \cdots, f_m(p) \right\} .$$

Mais, puisque $f_j(p) \leq 0$ pour $j \in \{1, \cdots, m\}$, cela est encore équivalent, pour tout $i \in \overline{I}$, à

$$f_i(p) = f_0(p) \equiv 0 ,$$

c'est-à-dire, pour tout $i \in \overline{I}$,

$$f_i(\overline{p} + u \oplus w) = 0$$

et w est donc solution de (5.9).
Montrons enfin qu'un tel w est unique. En substituant f_i pour h_2 dans la Proposition 3.2, p. 43, nous voyons que les gradients des fonctions $v \rightsquigarrow f_i(\overline{p} + u \oplus v)$ sont $(g_i(\overline{p} + u \oplus v))_{\mathcal{V}}$. En $(u, v) = (0, 0)$, ces gradients sont $(g_i(\overline{p}))_{\mathcal{V}}$ et ils sont linéairement indépendants. Dès lors, le déterminant du Jacobien du système (5.9) est non nul, et le Théorème des fonctions implicites nous permet de dire que (5.9) a une solution unique $w(u)$ pour u petit. De plus, la fonction implicite $w(\bullet)$ est différentiable dans un voisinage de 0 et $w(0) = 0$. ■

Nous arrivons à présent au théorème fondamental de cette section, qui établit que le $\mathcal{U}$-Lagrangien et le Lagrangien ordinaire restreint à $\mathcal{U}$ coïncident jusqu'au second ordre.

Théorème 5.4

Sous les notations et les hypothèses du §5.1.1,

(i) le $\mathcal{U}$-Lagrangien $L_{\mathcal{U}}$ est différentiable dans un voisinage de 0 .

Avec $\mu(\bullet)$ et $w(\bullet)$ définis dans le Lemme 5.2, p. 67, et le Théorème 5.3, p. 70, respectivement, et avec $p(u) := \overline{p} + u \oplus w(u)$, nous avons, pour $u \in \mathcal{U}$ suffisamment petit,

$$\nabla L_{\mathcal{U}}(u) \oplus 0 = \gamma(p(u)) + \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(p(u)) \; g_j(p(u)) \tag{5.10}$$

où le membre de droite dans (5.10) *est le gradient du Lagrangien.*

(ii) le Hessien $\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)$ existe. Utilisant la décomposition matricielle suivante :

$$\nabla^2_{pp} L(\overline{p}, \overline{\lambda}) = \begin{pmatrix} H_{\mathcal{U}\mathcal{U}} & H_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \\ H_{\mathcal{V}\mathcal{U}} & H_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} ,$$

pour le Hessien du Lagrangien, nous avons $\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0) = H_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$.

Preuve :

[(i)] Puisque $\overline{g} = 0$, nous avons par (4.8)

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) = \partial f(\overline{p} + u \oplus W(u)) \cap \mathcal{U} .$$

Mais, par le Théorème 5.3, p. 70, nous avons

$$W(u) = \{w(u)\}$$

et puisque $\overline{p} + u \oplus w(u) = p(u)$, nous obtenons

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) = \partial f(p(u)) \cap \mathcal{U} .$$

Par (5.5), nous pouvons écrire

$$\partial f(p(u))$$

$$= \gamma(p(u)) + \left\{ \sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u))\ g_j(p(u)) : \mu_j(p(u)) \geq 0\ , \sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u)) = \pi \right\} . \tag{5.11}$$

Remarquons à présent que $J(p(u)) = \overline{I} \cup \{0\}$. En effet, nous avons d'une part que $f_i(p(u)) = 0$ pour $i \in \overline{I}$ par (5.9) et $f_0(p(u)) \equiv 0$; dès lors, si $i \in \overline{I} \cup \{0\}$, $f_i(p(u)) = 0$, c'est-à-dire $i \in J(p(u))$. D'autre part, pour $u \in \mathcal{U}$ suffisamment petit, par le Corollaire 4.4, p. 57, $w(u)$ est petit et donc $p(u)$ est proche de $\overline{p}$. Le Lemme 5.2, p. 67, nous assure alors que $J(p(u)) \subseteq \overline{I} \cup \{0\}$.

De plus, puisque $J(p(u)) = \overline{I} \cup \{0\}$, nous pouvons à nouveau appliquer le Lemme 5.2, p. 67, et affirmer que le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \overline{g}_i, \gamma(p(u)) \rangle + \displaystyle\sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u))\ \langle \overline{g}_i, g_j(p(u)) \rangle = 0\ , & \forall\ i \in \overline{I}\ , \\ \\ \displaystyle\sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u)) = \pi\ , & \end{array} \right. \tag{5.12}$$

a une solution unique et strictement positive. Par ailleurs, par la Proposition 5.1 (ii), p. 65, $\overline{g}_i \in \mathcal{V}$ pour tout $i \in \overline{I}$. Comme $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp}$, nous déduisons de (5.12) que

$$\gamma(p(u)) + \sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u))\ g_j(p(u)) \in \mathcal{U} .$$

Comme les $\mu_j(p(u))$ sont uniques, le membre de droite de (5.11) est un singleton; par conséquent,

$$\partial f(p(u)) = \{\nabla f(p(u))\} = \left\{ \gamma(p(u)) + \sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u))\ g_j(p(u)) \right\} \subseteq \mathcal{U} .$$

Puisque $\partial L_{\mathcal{U}}(u) = \partial f(p(u)) \cap \mathcal{U}$, $L_{\mathcal{U}}$ est différentiable dans un voisinage de 0 et nous avons

$$\nabla L_{\mathcal{U}}(u) \oplus 0 = \gamma(p(u)) + \sum_{j \in J(p(u))} \mu_j(p(u)) \; g_j(p(u)) \; .$$

Mais, puisque $J(p(u)) = \overline{I} \cup \{0\}$ et que $g_0(p(u)) \equiv 0$, nous avons aussi

$$\nabla L_{\mathcal{U}}(u) \oplus 0 = \gamma(p(u)) + \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(p(u)) \; g_j(p(u)) \; ,$$

c'est-à-dire (5.10).

[**(ii)**] Montrons d'abord que $p(\bullet)$ a un Jacobien en 0 et que $Jp(0) \; u = u \oplus 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}$. Puisque $p(u) = \overline{p} + u \oplus w(u)$, nous avons

$$Jp(0) \; u = \begin{pmatrix} I \\ \\ Jw(0) \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u \\ \\ Jw(0) \; u \end{pmatrix} .$$

Il suffit donc de prouver que $Jw(0) \; u = 0$. Or, par le Corollaire 4.4, p. 57, et puisque $\overline{g} = 0 \in \mathrm{ri}\, \partial f(\overline{p})$, nous avons $w(u) = o(\|u\|_{\mathcal{U}})$, c'est-à-dire par définition

$$\lim_{u \to 0} \frac{w(u)}{\|u\|_{\mathcal{U}}} = 0 \; . \tag{5.13}$$

Mais nous savons par le Théorème 5.3, p. 70, que $w(0) = 0$ et que $w(\bullet)$ est différentiable au point 0 . Dès lors, (5.13) est équivalent à

$$\lim_{u \to 0} \frac{w(u) - w(0)}{\|u - 0\|_{\mathcal{U}}} = 0 \tag{5.14}$$

et il existe une et une seule matrice $Jw(0)$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{u \to 0} \frac{w(u) - w(0) - Jw(0) \; u}{\|u - 0\|_{\mathcal{U}}} = 0 \; .$$

Puisque par (5.14) nous voyons que cela est vérifié pour $Jw(0) = 0$ et que cette matrice est unique, nous avons bien $Jw(0) \; u = 0$.

Montrons à présent que $\nabla L_{\mathcal{U}}$ est différentiable en 0 . (5.10) nous donne l'expression de $\nabla L_{\mathcal{U}}(\bullet)$. Or, chacune des fonctions intervenant dans cette expression est différentiable. En effet, ψ et $f_j \in C^2$, donc γ et g_j sont différentiables; par le Lemme 5.2, p. 67, μ est différentiable en $\overline{p} = p(0)$ et, par le Théorème 5.3, p. 70, w est différentiable en 0 .

Nous pouvons donc calculer $\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u$ pour $u \in \mathcal{U}$ à partir de (5.10)

$$\begin{aligned}
&(\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u) \oplus 0 \\
&\quad = (\nabla^2 \psi(\overline{p})\ Jp(0))\ u + \sum_{j \in \overline{I}} \mu_j(\overline{p})\ \nabla^2 f_j(\overline{p})\ Jp(0)\ u + \sum_{j \in \overline{I}} \langle \nabla \mu_j(\overline{p}), Jp(0)\ u \rangle\ g_j(\overline{p})\,,
\end{aligned}$$

puisque $p(0) = \overline{p}$.
Mais, pour $j \in \overline{I}$, nous avons $\mu_j(\overline{p}) = \overline{\mu}_j = \overline{\lambda}_j$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
&(\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u) \oplus 0 \\
&= \nabla^2 \psi(\overline{p})\ Jp(0)\ u + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\lambda}_j\ \nabla^2 f_j(\overline{p})\ Jp(0)\ u + \sum_{j \in \overline{I}} \langle \nabla \mu_j(\overline{p}), Jp(0)\ u \rangle\ \overline{g}_j \\
&= \left[\nabla^2 \psi(\overline{p}) + \sum_{j \in \overline{I}} \overline{\lambda}_j\ \nabla^2 f_j(\overline{p}) \right] Jp(0)\ u + \sum_{j \in \overline{I}} \langle \nabla \mu_j(\overline{p}), Jp(0)\ u \rangle\ \overline{g}_j\,.
\end{aligned}$$

Or, le terme entre crochets dans le membre de droite n'est rien d'autre que $\nabla^2_{pp} L(\overline{p}, \overline{\lambda})$ et, puisque $Jp(0)\ u = u \oplus 0$, nous avons

$$(\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u) \oplus 0 = \nabla^2_{pp} L(\overline{p}, \overline{\lambda})\ (u \oplus 0) + \sum_{j \in \overline{I}} \langle \nabla \mu_j(\overline{p}), Jp(0)\ u \rangle\ \overline{g}_j\,.$$

Dès lors, $\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u$ est égal à la $\mathcal{U}$-projection du membre de droite.

Or, par la Proposition 5.1 (ii), p. 65,

$$\sum_{j \in \overline{I}} \langle \nabla \mu_j(\overline{p}), Jp(0)\ u \rangle\ \overline{g}_j \in \mathcal{V}$$

et

$$\nabla^2_{pp} L(\overline{p}, \overline{\lambda})\ (u \oplus 0) = \begin{pmatrix} H_{\mathcal{U}\mathcal{U}} & H_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \\ H_{\mathcal{V}\mathcal{U}} & H_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{\mathcal{U}\mathcal{U}} & u \\ H_{\mathcal{V}\mathcal{U}} & u \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\, u = H_{\mathcal{U}\mathcal{U}}\ u$$

et le théorème est démontré. ■

5.2 Un algorithme conceptuel

Nous venons de voir que, lorsque la fonction f a une forme particulière, son $\mathcal{U}$-Lagrangien se ramène au Lagrangien ordinaire. Ici, nous revenons à une fonction f quelconque et nous allons construire un algorithme conceptuel pour minimiser f . Cet algorithme convergera superlinéairement.

5.2.1 Algorithme et justification

Étant donné un point p proche d'un minimum $\overline{p}$ de f , nous aimerions calculer un point p^+ , superlinéairement plus proche de $\overline{p}$. L'idée de l'algorithme est de décomposer le mouvement de p à p^+ en un pas "vertical" et en un pas "horizontal", c'est-à-dire que nous calculerons d'abord la composante $\mathcal{V}$ de l'incrément $p^+ - p$, puis sa composante $\mathcal{U}$, en faisant un pas de Newton.

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, les sous-espaces vectoriels définis au §3.2, associés au minimum $\overline{p}$ et au sous-gradient $\overline{g} = 0 \in \partial f(\overline{p})$. Supposons que le $\mathcal{U}$-Hessien de f en $\overline{p}$, $H_{\mathcal{U}}f(\overline{p})$, défini en (4.15), existe et soit défini positif.

Algorithme

Pas en $\mathcal{V}$:

Calculer une solution $\delta v \in \mathcal{V}$ de

$$\min \left\{ f(p + 0 \oplus \delta v) : \delta v \in \mathcal{V} \right\} \tag{5.15}$$

et poser $p' := p + 0 \oplus \delta v$.

Pas en $\mathcal{U}$:

Faire un pas de Newton dans $p' + \mathcal{U}$: calculer la solution $\delta u \in \mathcal{U}$

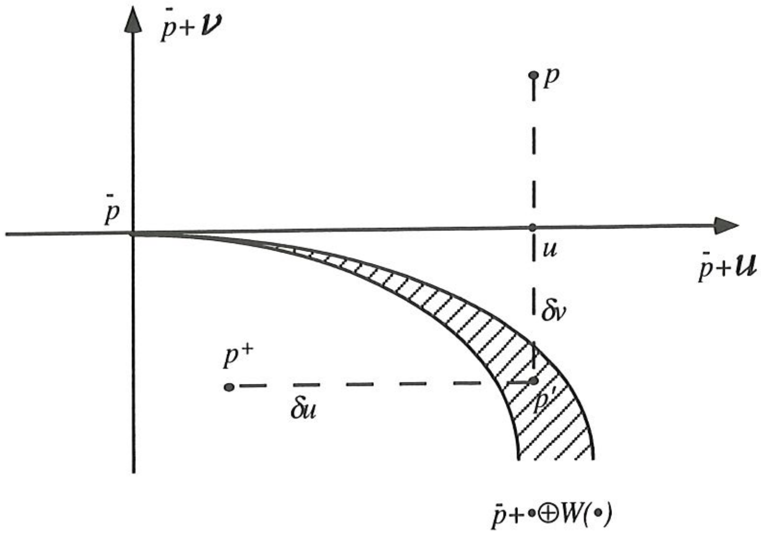
$$g'_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}}f(\overline{p})\ \delta u = 0 , \tag{5.16}$$

où $g' \in \partial f(p')$ est tel que $g'_{\mathcal{V}} = 0$, de sorte que $g'_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}((p' - \overline{p})_{\mathcal{U}})$.

Mise à jour :

Poser $p^+ := p' + \delta u \oplus 0 = p + \delta u \oplus \delta v$.

La figure ci-dessous illustre cette itération en deux pas, "vertical" puis "horizontal".



Le pas en $\mathcal{U}$ de cet algorithme nécessite quelque explication.

Si q est une fonction quadratique, nous savons que la direction de Newton δu au point u est solution de l'équation

$$\nabla q(u) + \nabla^2 q(0)\ \delta u = 0\ .$$

Si nous supposons à présent que

$$q(u) = \tfrac{1}{2}\ u^T\ \nabla^2 L_{\mathcal{U}}(0)\ u = \tfrac{1}{2}\ u^T\ HL_{\mathcal{U}}(0)\ u\ ,$$

c'est-à-dire que q est une approximation quadratique de $L_{\mathcal{U}}$, alors la direction de Newton δu au point $(p' - \overline{p})_{\mathcal{U}}$ est solution de l'équation

$$\partial L_{\mathcal{U}}((p' - \overline{p})_{\mathcal{U}}) + HL_{\mathcal{U}}(0)\ \delta u = 0\ ,$$

c'est-à-dire , puisque $HL_{\mathcal{U}}(0) = H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$, que δu est solution de

$$g'_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\ \delta u = 0 \qquad \text{où } g'_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}((p' - \overline{p})_{\mathcal{U}})\ .$$

Montrons à présent que, si $g' \in \partial f(p')$ tel que $g'_{\mathcal{V}} = 0$, alors $g'_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}((p' - \overline{p})_{\mathcal{U}})$.

Posons $u := (p' - \overline{p})_{\mathcal{U}}$. Nous devons voir que $g'_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}(u)$, c'est-à-dire par (4.7) que $g'_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$ pour $w \in W(u)$. Or, nous choisissons ici $\overline{g} = 0$, et donc nous devons prouver que $g'_{\mathcal{U}} \oplus 0 \in \partial f(\overline{p} + u \oplus w)$.
Mais nous savons déjà que $g' = g'_{\mathcal{U}} \oplus g'_{\mathcal{V}} = g'_{\mathcal{U}} \oplus 0 \in \partial f(p')$.
Il nous reste donc à montrer que $p' = \overline{p} + u \oplus w$ pour $w \in W(u)$. Or, nous avons

$$w = \operatorname*{argmin}_{v \in \mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) - 0 \right\}\ ,$$

avec

$$\overline{p}+u\oplus v = p+(\overline{p}-p)+\begin{pmatrix}(p'-\overline{p})_{\mathcal{U}}\\ v\end{pmatrix} = p+\begin{pmatrix}(\overline{p}-p)_{\mathcal{U}}+(p'-\overline{p})_{\mathcal{U}}\\ (\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}+v\end{pmatrix}$$

$$= p+\begin{pmatrix}0\\ (\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}+v\end{pmatrix} = p+0\oplus\{(\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}+v\}\ .$$

Dès lors,

$$\min_{v\in\mathcal{V}} f(\overline{p}+u\oplus v) = \min_{v\in\mathcal{V}} f(p+0\oplus\{(\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}+v\})\ .$$

Mais, par le pas en $\mathcal{V}$, nous savons que δv est solution de ce problème et par conséquent, nous avons

$$(\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}+w=\delta v\ ,$$

c'est-à-dire $w=\delta v-(\overline{p}-p)_{\mathcal{V}}=(p'-\overline{p})_{\mathcal{V}}$.
Dès lors,

$$\overline{p}+u\oplus w=\overline{p}+\begin{pmatrix}(p'-\overline{p})_{\mathcal{U}}\\ (p'-\overline{p})_{\mathcal{V}}\end{pmatrix}=\overline{p}+(p'-\overline{p})=p'\ .$$

5.2.2 Convergence superlinéaire de l'algorithme

Comme nous l'avons annoncé, l'algorithme ci-dessus converge superlinéairement, ainsi que l'établit le théorème suivant :

Théorème 5.5

Utilisant les notations du Chapitre 4, supposons que $\overline{g}:=0\in\operatorname{ri}\partial f(\overline{p})$ et que f ait un $\mathcal{U}$-Hessien défini positif en $\overline{p}$.
Alors, le point p^+ construit par l'algorithme ci-dessus vérifie

$$\|p^+-\overline{p}\|=o(\|p-\overline{p}\|)\ .$$

Preuve :
Notons à nouveau $u := (p - \overline{p})_{\mathcal{U}} = (p' - \overline{p})_{\mathcal{U}}$. Pour $\delta v \in \mathcal{V}$, faisons le changement de variable $v := (p - \overline{p})_{\mathcal{V}} + \delta v$, de sorte que (5.15) peut s'écrire $\min\limits_{v \in \mathcal{V}} f(\overline{p} + u \oplus v)$. En effet, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\min_{v \in \mathcal{V}} f(\overline{p} + u \oplus v) &= \min_{\delta v \in \mathcal{V}} f(\overline{p}_{\mathcal{U}} \oplus \overline{p}_{\mathcal{V}} + (p - \overline{p})_{\mathcal{U}} \oplus [(p - \overline{p})_{\mathcal{V}} + \delta v]) \\
&= \min_{\delta v \in \mathcal{V}} f(\overline{p}_{\mathcal{U}} + (p - \overline{p})_{\mathcal{U}} \oplus \overline{p}_{\mathcal{V}} + (p - \overline{p})_{\mathcal{V}} + \delta v) \\
&= \min_{\delta v \in \mathcal{V}} f(p_{\mathcal{U}} \oplus p_{\mathcal{V}} + \delta v) \\
&= \min_{\delta v \in \mathcal{V}} f(p + 0 \oplus \delta v) ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire (5.15).
Soit v^+ une solution; nous avons $v^+ = (p - \overline{p})_{\mathcal{V}} + \delta v$. Or, $p = p^+ - (\delta u \oplus \delta v)$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
v^+ &= (p^+ - (\delta u \oplus \delta v) - \overline{p})_{\mathcal{V}} + \delta v \\
&= (p^+ - \overline{p})_{\mathcal{V}} - \delta v + \delta v \\
&= (p^+ - \overline{p})_{\mathcal{V}} \in W(u) .
\end{aligned}$$

Si nous appliquons à présent le Corollaire 4.4, p. 57, ce qui est permis puisque $\overline{g} = 0 \in \operatorname{ri} \partial f(\overline{p})$, nous avons

$$\|(p^+ - \overline{p})_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}} = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) = o(\|p - \overline{p}\|) . \tag{5.17}$$

D'autre part, par (4.17), nous avons

$$\partial L_{\mathcal{U}}(u) \subseteq \nabla L_{\mathcal{U}}(0) + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\, u + B(0, o(\|u\|_{\mathcal{U}})) .$$

Mais, puisque $\nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}} = 0$ et que $g'_{\mathcal{U}} \in \partial L_{\mathcal{U}}((p' - \overline{p})_{\mathcal{U}}) = \partial L_{\mathcal{U}}(u)$ par le pas en $\mathcal{U}$ de l'algorithme, nous avons

$$g'_{\mathcal{U}} = 0 + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\, u + o(\|u\|_{\mathcal{U}}) ,$$

c'est-à-dire

$$g'_{\mathcal{U}} - H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\, u = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) .$$

Soustrayant cette dernière égalité de (5.16), nous obtenons

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})\, (u + \delta u) = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) ,$$

et puisque nous avons supposé que $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ est défini positif et donc inversible,

$$\|u + \delta u\|_{\mathcal{U}} = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) . \tag{5.18}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}(p^+ - \overline{p})_{\mathcal{U}} &= (p^+ - p')_{\mathcal{U}} + (p' - p)_{\mathcal{U}} + (p - \overline{p})_{\mathcal{U}} \\ &= \delta u + 0 + u \\ &= u + \delta u \,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dès lors, réunissant (5.18) et (5.19), nous obtenons

$$\|(p^+ - \overline{p})_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{U}} = \|u + \delta u\|_{\mathcal{U}} = o(\|u\|_{\mathcal{U}}) = o(\|p - \overline{p}\|) \,. \tag{5.20}$$

Finalement, (5.17) et (5.20) entraînent

$$\|p^+ - \overline{p}\| = o(\|p - \overline{p}\|) \,.$$

■

5.2.3 Application de l'algorithme à un exemple

Revenons à présent à notre exemple 3.2.5. Nous avions choisi $\overline{p} = (0,0)$ et calculé que $\partial f(0,0) = \left\{ \binom{0}{\beta} : -1 \leq \beta \leq 1 \right\}$. Manifestement, $(0,0) \in \partial f(\overline{p})$ et par conséquent, en vertu de la Proposition 1.6 (i), p. 11, $\overline{p} = (0,0)$ est le minimum de f . Nous pouvons donc essayer d'appliquer notre algorithme; nous le ferons en partant de deux points p (proches de $\overline{p}$) différents.

a) Choisissons $p = (0,1)$. Ce choix est particulier parce que $p \in \mathcal{V}$. Nous allons donc construire un point p^+ , superlinéairement plus proche de $\overline{p}$.

(i) Pas en $\mathcal{V}$:

Cherchons $\delta v \in I\!R$ solution de $\min_{\delta v \in I\!R} f((0,1) + (0, \delta v))$,

c'est-à-dire δv solution de $\min_{\delta v \in I\!R} \max\{-\delta v - 1, \delta v + 1\}$

ou encore δv solution de $\min_{\delta v \in I\!R} |\delta v + 1|$.

Nous trouvons immédiatement $\delta v = -1$ et par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} p' &= p + 0 \oplus \delta v \\ &= (0,1) + (0,-1) \\ &= (0,0) \,. \end{aligned}$$

(ii) Pas en $\mathcal{U}$:

Cherchons $\delta u \in I\!R$ solution de $g'_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(0,0)\ \delta u = 0$,
où $g' \in \partial f(0,0)$ est tel que $g'_{\mathcal{V}} = 0$.
Or, nous avons calculé en (4.3) que $L_{\mathcal{U}}(u) = \frac{1}{2}\ u^2$
et donc, $H_{\mathcal{U}} f(0,0) = H L_{\mathcal{U}}(0) = 1$.
D'autre part, puisque $\partial f(0,0) = \left\{ \binom{0}{\beta} : -1 \leq \beta \leq 1 \right\}$, si $g'_{\mathcal{V}} = 0$, il faut que $g'_{\mathcal{U}} = 0$.
Nous cherchons donc $\delta u \in I\!R$ solution de $0 + \delta u = 0$ et par conséquent, nous obtenons $\delta u = 0$.

(iii) Mise à jour :

Nous avons finalement

$$\begin{aligned} p^+ &= p + \delta u \oplus \delta v \\ &= (0,1) + (0,-1) \\ &= (0,0) \\ &= \overline{p}\,. \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, nous sommes donc arrivés à la solution en une seule itération.

b) Envisageons à présent le cas où $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ici, p n'appartient à aucun des sous-espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Nous allons faire plusieurs itérations de l'algorithme et voir ce qu'il se passe.

Itération 1 : $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(i) Pas en $\mathcal{V}$:

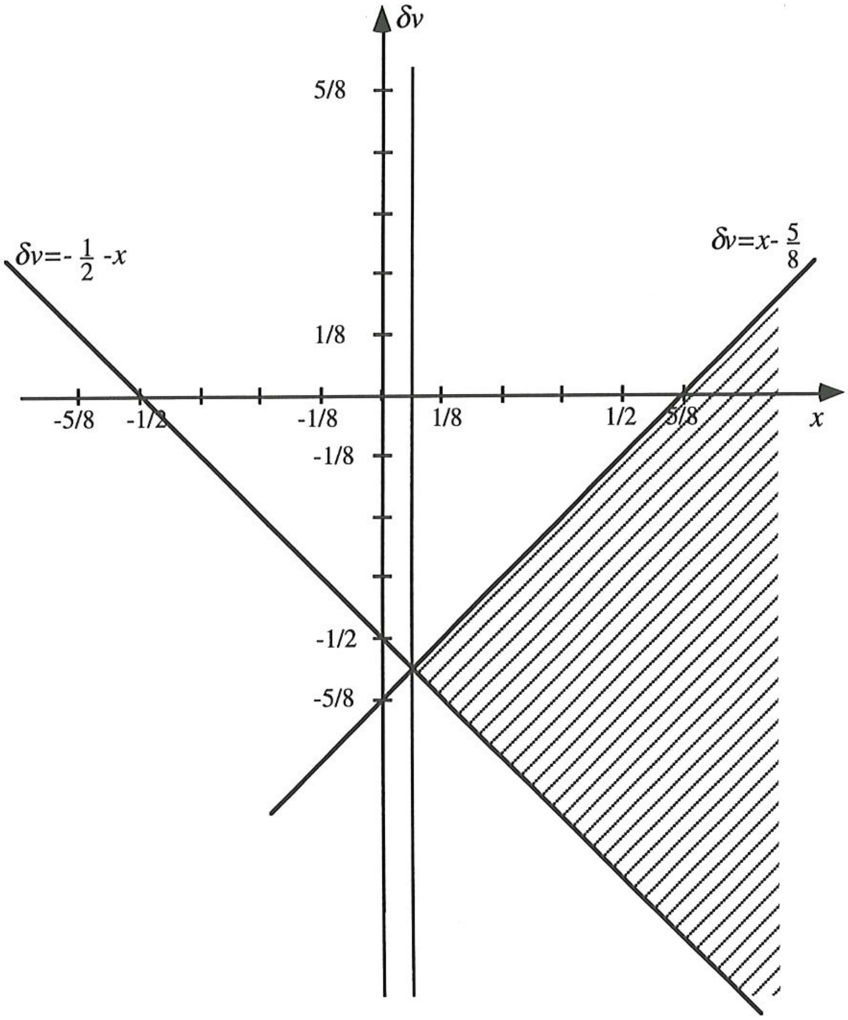
Cherchons $\delta v \in I\!R$, solution de

$$\min_{\delta v \in I\!R} f\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + (0, \delta v)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \min_{\delta v \in I\!R} \max\left\{-\tfrac{1}{2} - \delta v, \tfrac{5}{8} + \delta v\right\}\ .$$

Ce problème est équivalent à celui ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} \qquad \min x & & & \\ \text{sous les contraintes} & x & \geq & -\frac{1}{2} - \delta v\ , \\ & x & \geq & \frac{5}{8} + \delta v\ . \end{array} \right.$$

Une résolution graphique donne



La solution optimale x est solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta v & = & -\frac{1}{2} - x \ , \\ \delta v & = & x - \frac{5}{8} \ , \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\frac{1}{2} - x & = & x - \frac{5}{8} \ , \\ \delta v & = & x - \frac{5}{8} \ , \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{16} \ , \\ \delta v & = & -\frac{9}{16} \ . \end{array}\right.$$

Dès lors, nous avons

$$\begin{aligned} p' &= p + 0 \oplus \delta v \,, \\ &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \left(0, -\tfrac{9}{16}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right) \,. \end{aligned}$$

(ii) Pas en $\mathcal{U}$:

Cherchons $\delta u \in I\!R$ solution de $g'_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(0,0)\ \delta u = 0$ où $H_{\mathcal{U}} f(0,0) = 1$ et $g' \in \partial f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ est tel que $g'_{\mathcal{V}} = 0$.

Or, nous avons

$$f\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right) = \ell\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right) = q\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right)$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \partial f\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right) &= \mathrm{CO}\left\{\partial \ell\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right) \cup \partial q\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{16}\right)\right\} \\ &= \mathrm{CO}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \,. \end{aligned}$$

Dès lors, si $g' \in \partial f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ avec $g'_{\mathcal{V}} = 0$, $g'_{\mathcal{U}} = \frac{1}{4}$. Nous avons donc δu solution de $\frac{1}{4} + \delta u = 0$, c'est-à-dire $\delta u = -\frac{1}{4}$.

(iii) Mise à jour :

$$\begin{aligned} p^+ &= p + \delta u \oplus \delta v \\ &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{9}{16}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{16}\right) \,. \end{aligned}$$

Remarquons que $p^+ = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right)$ est bien superlinéairement plus proche de $\overline{p} = (0,0)$ que ne l'était $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Faisons à présent une deuxième itération pour voir comment la suite des itérés évolue.

Itération 2 : $p = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right)$

(i) Pas en $\mathcal{V}$:

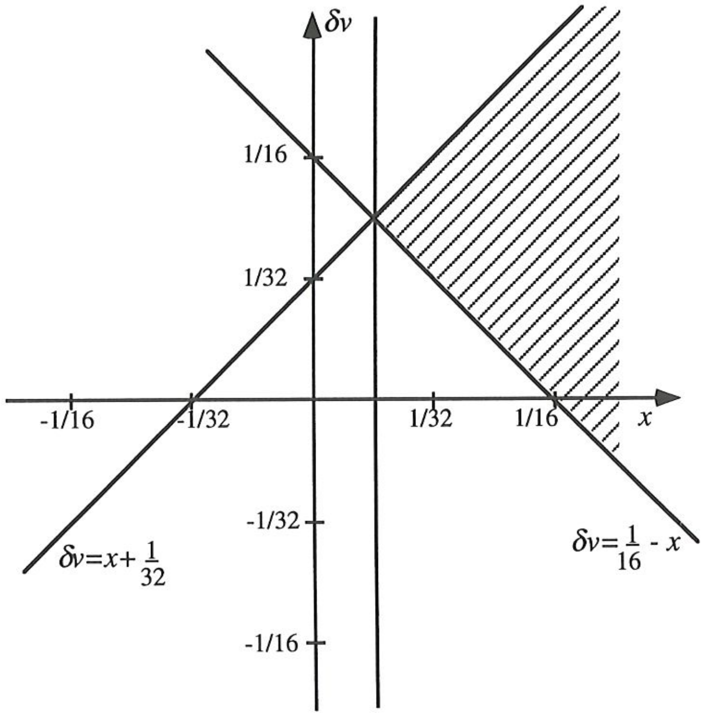
Cherchons $v \in I\!R$, solution de

$$\min_{\delta v \in I\!R} f\left(\left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{16}\right) + (0, \delta v)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \min_{\delta v \in I\!R} \max\left\{\tfrac{1}{16} - \delta v, -\tfrac{1}{32} + \delta v\right\} .$$

Ce problème est équivalent à celui ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \min x & & \\ \text{sous les contraintes} \quad x & \geq & \frac{1}{16} - \delta v \, , \\ x & \geq & -\frac{1}{32} + \delta v \, . \end{array}\right.$$

Procédons à nouveau graphiquement.



La solution optimale x est solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \delta v & = & \frac{1}{16} - x \, , \\ \delta v & = & x + \frac{1}{32} \, , \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{16}-x & = & x+\frac{1}{32}\,, \\ \delta v & = & x+\frac{1}{32}\,, \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{64}\,, \\ \delta v & = & \frac{3}{64}\,. \end{array}\right.$$

Dès lors, nous avons

$$\begin{array}{lcl} p' & = & p+0\oplus\delta v\,, \\ & = & \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{16}\right)+\left(0,\frac{3}{64}\right) \\ & = & \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right)\,. \end{array}$$

(ii) Pas en $\mathcal{U}$:

Cherchons $\delta u \in I\!\!R$ solution de $g'_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}}f(0,0)\ \delta u = 0$ où $H_{\mathcal{U}}f(0,0) = 1$ et $g' \in \partial f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right)$ est tel que $g'_{\mathcal{V}} = 0$.

Or,

$$f\left(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{64}\right)=\ell\left(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{64}\right)=q\left(\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{64}\right)$$

et par conséquent,

$$\begin{array}{lcl} \partial f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right) & = & \mathrm{CO}\left\{\partial\ell\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right)\cup\partial q\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right)\right) \\ & = & \mathrm{CO}\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right\}\,. \end{array}$$

Dès lors, si $g' \in \partial f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{64}\right)$ avec $g'_{\mathcal{V}} = 0$, $g'_{\mathcal{U}} = \frac{1}{8}$. Nous avons donc δu solution de $\frac{1}{8}+\delta u = 0$, c'est-à-dire $\delta u = -\frac{1}{8}$.

(iii) Mise à jour :

$$\begin{array}{lcl} p^+ & = & p+\delta u\oplus\delta v \\ & = & \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{1}{8},\frac{3}{64}\right) \\ & = & \left(\frac{1}{8},-\frac{1}{64}\right)\,. \end{array}$$

Partant de $p = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, nous avons donc obtenu $p^+ = \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{16}\right)$ qui, pris à son tour comme point initial, nous a fourni le point $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{64}\right)$. Nous pouvons à présent deviner que l'itéré suivant sera $\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2},-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{16},-\frac{1}{256}\right)$, et la suite des itérés converge visiblement vers $(0,0)$ de façon superlinéaire.

Chapitre 6

$\mathcal{U}$-Hessien et régularisée de Moreau-Yosida

Le but de ce chapitre est de donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du $\mathcal{U}$-Hessien de f , en termes de régularisée de Moreau-Yosida. Nous commencerons par définir cette régularisée et nous en donnerons quelques propriétés qui nous seront directement utiles; nous étudierons ensuite ses liens avec le $\mathcal{U}$-Hessien.

6.1 Régularisée de Moreau-Yosida

6.1.1 Définition

Étant donné un opérateur linéaire M , symétrique et défini positif, nous notons ici $\langle \bullet, \bullet \rangle_M := \langle M \bullet, \bullet \rangle$ et $\frac{1}{2} \|x\|_M^2 := \frac{1}{2} \langle x, x \rangle_M$. La plus petite et la plus grande valeur propre de M sont respectivement notées λ et Λ .

La **régularisée de Moreau-Yosida**, notée F , d'une fonction convexe fermée f , associée à la métrique définie par M , est la fonction

$$F(x) := \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{ f(y) + \tfrac{1}{2} \|x - y\|_M^2 \} =: \left(f \underset{\vee}{+} \tfrac{1}{2} \| \bullet \|_M^2 \right)(x) \tag{6.1}$$

(le symbole $\underset{\vee}{+}$ désigne l'inf-convolution définie en (1.2)).

Elle est continûment différentiable et en vertu du Corollaire X 2.1.3 dans [2] et de (1.4), sa conjuguée convexe est la fonction

$$F^*(s) \quad = \quad f^*(s) + \left(\tfrac{1}{2} \| \bullet \|_M^2 \right)^* (s)$$

$$= \quad f^*(s) + \tfrac{1}{2}\ \|s\|^2_{M^{-1}}\ . \tag{6.2}$$

Si nous notons $p(x)$ l'unique minimiseur dans (6.1), appelé le **point proximal** de x , alors

$$F(x) \quad = \quad f(p(x)) + \tfrac{1}{2}\ \|x - p(x)\|^2_M$$

et

$$G \quad := \quad \nabla F(x) = \tfrac{1}{2}\ 2\ M\ (x - p(x)) = M(x - p(x))\ . \tag{6.3}$$

Or, puisque $p(x)$ minimise (6.1), nous savons, d'après la Proposition 1.6 (i), p. 11, que $0 \in \partial F(p(x))$, c'est-à-dire $0 \in \partial f(p(x)) - M(x-p(x))$, ou encore $M(x-p(x)) \in \partial f(p(x))$. Dès lors,

$$G = \nabla F(x) = M(x - p(x)) \in \partial f(p(x))\ . \tag{6.4}$$

De plus, sans aucune hypothèse (voir l'Exemple XI 3.4.4 dans [2]), $\nabla F(\bullet)$ **est Lipschitzien de constante** Λ et vérifie

$$\forall\ x_1, x_2 \in I\!R^n\ , \quad \|\nabla F(x_1) - \nabla F(x_2)\|^2 \leq \Lambda\ \langle \nabla F(x_1) - \nabla F(x_2), x_1 - x_2\rangle\ . \tag{6.5}$$

6.1.2 Quelques propriétés

Rappelons pour commencer qu'une fonction ϕ est dite **fortement convexe de module** $c > 0$ si $\phi(\bullet) - \frac{1}{2}\ c\ \|\ \bullet\ \|^2$ est une fonction convexe. Le premier résultat montre que la convexité forte est transmise de f à F (et réciproquement).

Théorème 6.1

Soit f une fonction convexe à valeurs finies.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est fortement convexe de module $\frac{1}{\ell}$;

(ii) ∇f^* est Lipschitzien de constante ℓ ;

(iii) ∇F^* est Lipschitzien de constante L ;

(iv) F est fortement convexe de module $\frac{1}{L}$.

De plus, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\ell - \tfrac{1}{\lambda} \leq L \leq \ell + \tfrac{1}{\lambda}\ .$$

Preuve :
F et f étant à valeurs finies, nous pouvons appliquer les Théorèmes X 4.2.1 et X 4.2.2 dans [2] pour prouver les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).
Il reste donc à montrer que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).
Remarquons d'abord que, d'après (6.2), nous avons

$$\nabla F^*(\bullet) = \nabla f^*(\bullet) + M^{-1}(\bullet)$$

lorsqu'un des gradients existe.
Dès lors, si ∇f^* est Lipschitzien de constante ℓ , nous avons pour tout $s_1, s_2 \in I\!R^n$,

$$\begin{aligned} \|\nabla F^*(s_1) - \nabla F^*(s_2)\| &= \|\nabla f^*(s_1) + M^{-1}(s_1) - \nabla f^*(s_2) - M^{-1}(s_2)\| \\ &\leq \|\nabla f^*(s_1) - \nabla f^*(s_2)\| + \|M^{-1}(s_1 - s_2)\| \\ &\leq \ell \, \|s_1 - s_2\| + \|M^{-1}\| \, \|s_1 - s_2\| \, . \end{aligned}$$

Or,

$$\|M^{-1}\| = \tfrac{1}{\lambda} \cdot$$

Dès lors,

$$\|\nabla F^*(s_1) - \nabla F^*(s_2)\| \leq \left(\ell + \tfrac{1}{\lambda}\right) \, \|s_1 - s_2\| \, ,$$

et donc ∇F^* est Lipschitzien de constante $L \leq \ell + \frac{1}{\lambda}$.
Réciproquement, supposons que ∇F^* soit Lipschitzien de constante L . Alors, pour tout $s_1, s_2 \in I\!R^n$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\nabla f^*(s_1) - \nabla f^*(s_2)\| &= \|\nabla F^*(s_1) - M^{-1}(s_1) - \nabla F^*(s_2) + M^{-1}(s_2)\| \\ &\leq \|\nabla F^*(s_1) - \nabla F^*(s_2)\| + \|M^{-1}(s_1) - M^{-1}(s_2)\| \\ &\leq L \, \|s_1 - s_2\| + \|M^{-1}\| \, \|s_1 - s_2\| \\ &= \left(L + \tfrac{1}{\lambda}\right) \, \|s_1 - s_2\| \, , \end{aligned}$$

et par conséquent, ∇f^* est Lipschitzien de constante $\ell \leq L + \frac{1}{\lambda}$. ∎

Envisageons à présent quelques propriétés faisant intervenir l'opérateur proximal $p(\bullet)$.

Proposition 6.2

Pour tout $x_1, x_2 \in I\!R^n$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\|p(x_1) - p(x_2)\|_M^2 \leq \langle x_1 - x_2, p(x_1) - p(x_2)\rangle_M \, . \tag{6.6}$$

Il en résulte que l'application $x \mapsto p(x)$ est Lipschitzienne de constante $\frac{\Lambda}{\lambda}$.

Preuve :
Pour $p_1, p_2 \in I\!R^n$, $G_1 \in \partial f(p_1)$ et $G_2 \in \partial f(p_2)$ arbitraires, la convexité de f entraîne la monotonie des sous-gradients (voir par exemple le Corollaire 31.5.2 dans [6]) :

$$\langle G_1 - G_2, p_1 - p_2 \rangle \geq 0 \, .$$

Prenons maintenant x_1 et $x_2 \in I\!R^n$, et écrivons cette inégalité pour $p_1 := p(x_1)$, $p_2 := p(x_2)$, G_1 et G_2 de (6.4). Nous obtenons successivement les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\langle M(x_1 - p(x_1)) - M(x_2 - p(x_2)), p(x_1) - p(x_2) \rangle \ \geq \ 0 \, , \\
&\langle x_1 - p(x_1), p(x_1) \rangle_M - \langle x_1 - p(x_1), p(x_2) \rangle_M \\
&\qquad - \langle x_2 - p(x_2), p(x_1) \rangle_M + \langle x_2 - p(x_2), p(x_2) \rangle_M \ \geq \ 0 \, , \\
&\langle x_1, p(x_1) \rangle_M - \|p(x_1)\|_M^2 - \langle x_1, p(x_2) \rangle_M + \langle p(x_1), p(x_2) \rangle_M \\
&\qquad - \langle x_2, p(x_1) \rangle_M + \langle p(x_2), p(x_1) \rangle_M + \langle x_2, p(x_2) \rangle_M - \|p(x_2)\|_M^2 \ \geq \ 0 \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, p(x_1) - p(x_2) \rangle_M \ &\geq \ \|p(x_1)\|_M^2 + \|p(x_2)\|_M^2 - 2 \, \langle p(x_1), p(x_2) \rangle_M \\
&= \ \|p(x_1) - p(x_2)\|_M^2 \, .
\end{aligned}$$

Ceci établit (6.6).
D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
\|p(x_1) - p(x_2)\|_M^2 \ &\leq \ \langle x_1 - x_2, p(x_1) - p(x_2) \rangle_M \\
&\leq \ \|x_1 - x_2\|_M \, \|p(x_1) - p(x_2)\| \\
&\leq \ \|M\| \, \|x_1 - x_2\| \, \|p(x_1) - p(x_2)\| \\
&= \ \Lambda \, \|x_1 - x_2\| \, \|p(x_1) - p(x_2)\| \, .
\end{aligned}$$

Or, M étant définie positive, une propriété bien connue du quotient de Rayleigh fournit l'inégalité

$$\lambda \, \|p(x_1) - p(x_2)\|^2 \leq \|p(x_1) - p(x_2)\|_M^2 \, .$$

Dès lors, réunissant les deux dernières inégalités, nous trouvons

$$\|p(x_1) - p(x_2)\|^2 \leq \tfrac{\Lambda}{\lambda} \, \|x_1 - x_2\| \, \|p(x_1) - p(x_2)\| \, ,$$

ou encore

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| \le \tfrac{\Lambda}{\lambda} \, \|x_1 - x_2\| \,,$$

et $p(\bullet)$ est Lipschitzien de constante $\frac{\Lambda}{\lambda}$. ■

Pour établir la proposition suivante, nous avons besoin d'un lemme préliminaire.

Lemme 6.3

> *Soient f une fonction convexe fermée, $z_0 \in I\!R^n$ et $g_0 \in \partial f(z_0)$.*
> *Supposons que $t \underset{>}{\to} 0$ et que $\frac{z-z_0}{t}$ ait un point d'accumulation ℓ .*
> *Soit $g \in \partial f(z)$ tel que $g \to g_0$.*
> *Alors, $\ell \in \mathcal{N} := N_{\partial f(z_0)}(g_0)$.*

Preuve :
Puisque $\partial f(z_0)$ est convexe et d'après (1.8), il faut montrer que

$$\langle \ell, \gamma - g_0 \rangle \le 0 \,, \qquad \forall\, \gamma \in \partial f(z_0) \,.$$

Soit γ arbitraire dans $\partial f(z_0)$.
Par la monotonie des sous-gradients, puisque f est convexe, nous avons $\langle g - \gamma, z - z_0 \rangle \ge 0$.
En divisant par t et en passant à la limite pour $t \underset{>}{\to} 0$, nous obtenons

$$\langle g_0 - \gamma, \ell \rangle \ge 0 \,, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \langle \ell, \gamma - g_0 \rangle \le 0 \,.$$ ■

Proposition 6.4

> *Lorsque $x \to x_0$, tous les points d'accumulation de $\frac{p(x)-p(x_0)}{\|x-x_0\|}$ se trouvent dans $\mathcal{N} \cap B\left(0, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)$.*
> *Il en résulte que, si $p(\bullet)$ a un Jacobien $\nabla p(x)$, alors $\operatorname{Im} \nabla p(x) \subseteq \mathcal{N}$.*

Preuve :
Appliquons le Lemme 6.3, p. 90, avec $z_0 = p(x_0)$, $g_0 = \nabla F(x_0) \in \partial f(p(x_0))$, $z = p(x)$, $g = \nabla F(x) \in \partial f(p(x))$ et $t = \|x - x_0\|$.
Lorsque $x \to x_0$, nous avons bien que $t \underset{>}{\to} 0$ et, puisque F est continûment différentiable, $g \to g_0$. Dès lors, tous les points d'accumulation de $\frac{p(x)-p(x_0)}{\|x-x_0\|}$ se trouvent dans $\mathcal{N}$.

D'autre part, par la Proposition 6.2, p. 88, les points d'accumulation de $\frac{p(x)-p(x_0)}{\|x-x_0\|}$ sont également dans $B\left(0, \frac{\Lambda}{\lambda}\right)$.
Il reste à montrer que, si $p(\bullet)$ a un Jacobien $\nabla p(x)$, son image se trouve dans $\mathcal{N}$. Pour cela, prenons un vecteur arbitraire $d \in I\!R^n$ et prouvons que $\nabla p(x_0)\ d \in \mathcal{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla p(x_0)\ d &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{p(x_0 + t\ d) - p(x_0)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{p(x_0 + t\ d) - p(x_0)}{t\ \|d\|}\ \|d\| \\ &= z\ \|d\| \end{aligned}$$

où $z \in \mathcal{N}$ par ce qui précède.
Or, puisque $\mathcal{N}$ est un cône et que $z \in \mathcal{N}$, $z\ \|d\|$, c'est-à-dire $\nabla p(x_0)\ d$, est dans $\mathcal{N}$ également, ce qui termine notre démonstration. ∎

Nous terminons cette première partie par un résultat montrant que l'opérateur proximal a un inverse explicite.

Théorème 6.5

Soient p un point tel que $\partial f(p) \neq \emptyset$ et $G \in \partial f(p)$.
Alors, p est le point proximal de $x := p + M^{-1}\ G$.

Preuve :
Nous avons $G = M(x-p) \in \partial f(p)$. Or, par (6.4), cela caractérise le point proximal de manière unique; le théorème est donc démontré. ∎

6.2 Lien avec le $\mathcal{U}$-Hessien

6.2.1 Position du problème

Étant donné $\overline{p} \in I\!R^n$ et $\overline{g} \in \partial f(\overline{p})$, nous allons nous intéresser au comportement de F , la régularisée de Moreau-Yosida de f , associée à la métrique euclidienne ($M = I$), au voisinage de

$$\overline{x} := \overline{p} + \overline{g} \,. \tag{6.7}$$

Pour ce faire, restreignons-nous à $\overline{x} + \mathcal{U}$ et cherchons à relier le Hessien ainsi réduit de F et le $\mathcal{U}$-Hessien de f en $\overline{p}$, $H_{\mathcal{U}}f(\overline{p})$.

Introduisons pour cela une fonction intermédiaire, $\phi_{\mathcal{V}}$, définie comme suit

$$\begin{array}{rccl} \phi_{\mathcal{V}}: & \mathcal{U} & \to & I\!R\,, \\ & u & \rightsquigarrow & \phi_{\mathcal{V}}(u) := \min\limits_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2}\, \|v\|^2_{\mathcal{V}} \right\} \,. \end{array} \tag{6.8}$$

6.2.2 Premières propriétés

Commençons par montrer que la fonction $\phi_{\mathcal{V}}$ introduite ci-dessus coïncide jusqu'au second ordre avec le $\mathcal{U}$-Lagrangien $L_{\mathcal{U}}$ défini en (4.1).

Lemme 6.6

Avec les notations ci-dessus, supposons que le Corollaire 4.4, p. 57, soit vérifié pour au moins un $w \in W(u)$ (ce qui est le cas par exemple si $\overline{g} \in \mathrm{ri}\, \partial f(\overline{p})$). Alors,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,,\ \exists\, \delta > 0 : \quad \|u\|_{\mathcal{U}} \le \delta \ \Rightarrow\ |\phi_{\mathcal{V}}(u) - L_{\mathcal{U}}(u)| \le \varepsilon\, \|u\|^2_{\mathcal{U}} \,. \tag{6.9}$$

En particulier,

$$\nabla \phi_{\mathcal{V}}(0) = \nabla L_{\mathcal{U}}(0) = \overline{g}_{\mathcal{U}} \tag{6.10}$$

et

$$\begin{array}{l} HL_{\mathcal{U}}(0) \text{ existe si et seulement si } H\phi_{\mathcal{V}}(0) \text{ existe} \\ \text{et dans ce cas,} \qquad H\phi_{\mathcal{V}}(0) = HL_{\mathcal{U}}(0)\,. \end{array} \tag{6.11}$$

Preuve :

a) En vue de montrer (6.9), choisissons un $\varepsilon > 0$ arbitraire.

- Nous avons d'une part, en vertu de (4.1) et (6.8),

$$\phi_{\mathcal{V}}(u) \geq L_{\mathcal{U}}(u) , \qquad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

et par conséquent,

$$\phi_{\mathcal{V}}(u) - L_{\mathcal{U}}(u) \geq 0 \geq -\varepsilon\ \|u\|_{\mathcal{U}}^2 . \tag{6.12}$$

- D'autre part, d'après (4.1) et (6.8), pour $w \in W(u)$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{V}}(u) &\leq f(\overline{p} + u \oplus w) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w \rangle_{\mathcal{V}} + \tfrac{1}{2}\ \|w\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &= L_{\mathcal{U}}(u) + \tfrac{1}{2}\ \|w\|_{\mathcal{V}}^2 . \end{aligned}$$

Mais, par le Corollaire 4.4, p. 57, nous savons que

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \quad \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \ \Rightarrow\ \|w\|_{\mathcal{V}} \leq \sqrt{2\,\varepsilon}\ \|u\|_{\mathcal{U}} \ , \ \forall\, w \in W(u) .$$

Pour $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{V}}(u) &\leq L_{\mathcal{U}}(u) + \tfrac{1}{2}\ 2\ \varepsilon\ \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \\ &= L_{\mathcal{U}}(u) + \varepsilon\ \|u\|_{\mathcal{U}}^2 , \end{aligned}$$

ou encore

$$\phi_{\mathcal{V}}(u) - L_{\mathcal{U}}(u) \leq \varepsilon\ \|u\|_{\mathcal{U}}^2 . \tag{6.13}$$

- (6.9) résulte alors directement de (6.12) et (6.13).

b) Remarquons d'abord que, par (6.9), nous avons

$$0 \leq |\phi_{\mathcal{V}}(0) - L_{\mathcal{U}}(0)| \leq \varepsilon\ \|0\|_{\mathcal{U}}^2 = 0$$

et que par conséquent,

$$\phi_{\mathcal{V}}(0) = L_{\mathcal{U}}(0) . \tag{6.14}$$

Établissons à présent (6.10). Nous savons par le Théorème 4.2 (ii), p. 52 , que $\overline{g}_{\mathcal{U}} = \nabla L_{\mathcal{U}}(0)$, c'est-à-dire que

$$A_u =: \frac{L_{\mathcal{U}}(u) - L_{\mathcal{U}}(0) - \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \to 0 \quad \text{lorsque } u \to 0 ,$$

et nous devons prouver que $\overline{g}_{\mathcal{U}} = \nabla\phi_{\mathcal{V}}(0)$, c'est-à-dire que

$$B_u =: \frac{\phi_{\mathcal{V}}(u) - \phi_{\mathcal{V}}(0) - \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \to 0 \quad \text{lorsque } u \to 0 \; .$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Écrivons B_u sous la forme

$$B_u = B_u - A_u + A_u \; ,$$

de sorte que

$$0 \leq |B_u| \leq |B_u - A_u| + |A_u| \; .$$

Puisque nous savons déjà que $|A_u| \to 0$, il reste à voir que $|B_u - A_u| \to 0$. Or,

$$\begin{aligned} |B_u - A_u| &= \frac{|\phi_{\mathcal{V}}(u) - \phi_{\mathcal{V}}(0) - \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}} - L_{\mathcal{U}}(u) + L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u\rangle_{\mathcal{U}}|}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \\ &= \frac{|\phi_{\mathcal{V}}(u) - L_{\mathcal{U}}(u)|}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (6.14).

Par ailleurs, par (6.9), il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta$,

$$|B_u - A_u| \;\leq\; \frac{\varepsilon\; \|u\|^2_{\mathcal{U}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \;=\; \varepsilon\; \|u\|_{\mathcal{U}} \; ,$$

c'est-à-dire

$$|B_u - A_u| \;\to\; 0 \qquad \text{lorsque } u \to 0 \; .$$

c) Supposons l'existence de $HL_{\mathcal{U}}(0)$ et prouvons que $H\phi_{\mathcal{V}}(0)$ existe également et que ces deux Hessiens sont égaux (la réciproque se démontre de façon analogue).

Puisque $HL_{\mathcal{U}}(0)$ existe, nous avons

$$C_u =: \frac{L_{\mathcal{U}}(u) - L_{\mathcal{U}}(0) - \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} \to 0 \qquad \text{lorsque } u \to 0 \; ,$$

et nous devons prouver que

$$D_u =: \frac{\phi_{\mathcal{V}}(u) - \phi_{\mathcal{V}}(0) - \langle \nabla \phi_{\mathcal{V}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} \to 0 \qquad \text{lorsque } u \to 0 \; .$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Écrivons à nouveau

$$D_u = D_u - C_u + C_u ,$$

de sorte que

$$0 \leq |D_u| \leq |D_u - C_u| + |C_u| .$$

Puisque nous savons déjà que $|C_u| \to 0$, il reste à voir que $|D_u - C_u| \to 0$. Or,

$$\begin{aligned} D_u - C_u &= \frac{\phi_{\mathcal{V}}(u) - \phi_{\mathcal{V}}(0) - \langle \nabla\phi_{\mathcal{V}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} \\ &\quad - \frac{L_{\mathcal{U}}(u) - L_{\mathcal{U}}(0) - \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u\rangle_{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} \\ &= \frac{\phi_{\mathcal{V}}(u) - L_{\mathcal{U}}(u)}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (6.14) et (6.10).

Par ailleurs, par (6.9), il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta$,

$$|D_u - C_u| \leq \frac{\varepsilon\, \|u\|^2_{\mathcal{U}}}{\|u\|^2_{\mathcal{U}}} = \varepsilon ,$$

c'est-à-dire

$$|D_u - C_u| \to 0 \qquad \text{lorsque } u \to 0 . \qquad \blacksquare$$

La proposition suivante justifie l'introduction de la fonction $\phi_{\mathcal{V}}$: en fait, la régularisée de Moreau-Yosida de $\phi_{\mathcal{V}}$, $\Phi_{\mathcal{V}}$, est obtenue à partir de $F_{\mathcal{U}}$, la restriction de F à $\overline{x} + \mathcal{U}$, par une simple translation.

Proposition 6.7

Avec les notations de ce chapitre, les deux fonctions de $\mathcal{U}$ dans $I\!R$ définies par

$$d_{\mathcal{U}} \rightsquigarrow \Phi_{\mathcal{V}}(d_{\mathcal{U}}) := \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \phi_{\mathcal{V}}(u) + \frac{1}{2}\, \|d_{\mathcal{U}} - u\|^2_{\mathcal{U}} \right\}$$

et

$$d_{\mathcal{U}} \rightsquigarrow F_{\mathcal{U}}(d_{\mathcal{U}}) := F(\overline{x} + d_{\mathcal{U}} \oplus 0)$$

vérifient

$$F_{\mathcal{U}}(d_{\mathcal{U}}) = \Phi_{\mathcal{V}}(\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}}) + \tfrac{1}{2}\, \|\overline{g}_{\mathcal{V}}\|^2_{\mathcal{V}} , \qquad \forall\, d_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U} .$$

Preuve :
Soit $d_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$. Puisque $\overline{x} = \overline{p} + \overline{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{U}}(d_{\mathcal{U}}) &= F(\overline{p} + \overline{g}_{\mathcal{U}} \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}} + d_{\mathcal{U}} \oplus 0) \\ &= F(\overline{p} + (\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}}) \oplus \overline{g}_{\mathcal{V}}) \,. \end{aligned}$$

Appliquant la définition (6.1), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{U}}(d_{\mathcal{U}}) &= \min_{(u,v)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) + \tfrac{1}{2} \, \|(\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}} - u) \oplus (\overline{g}_{\mathcal{V}} - v)\|^2 \right\} \\ &= \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \min_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}} - v\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}} - u\|_{\mathcal{U}}^2 \right\} \,. \end{aligned}$$

Or, d'après (6.8),

$$\begin{aligned} &\min_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}} - v\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} \\ &= \min_{v\in\mathcal{V}} \left\{ f(\overline{p} + u \oplus v) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, v\rangle_{\mathcal{V}} + \tfrac{1}{2} \, \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &= \phi_{\mathcal{V}}(u) + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}}^2 \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, utilisant à nouveau (6.1),

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{U}}(d_{\mathcal{U}}) &= \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \phi_{\mathcal{V}}(u) + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}}^2 + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}} - u\|_{\mathcal{U}}^2 \right\} \\ &= \Phi_{\mathcal{V}}(\overline{g}_{\mathcal{U}} + d_{\mathcal{U}}) + \tfrac{1}{2} \, \|\overline{g}_{\mathcal{V}}\|_{\mathcal{V}}^2 \,. \end{aligned}$$

■

6.2.3 Condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$

Puisque, d'après le Lemme 6.6, p. 92, $L_{\mathcal{U}}$ est proche de $\phi_{\mathcal{V}}$, leurs régularisées de Moreau-Yosida respectives sont proches l'une de l'autre. Dès lors, en vertu de la Proposition 6.7, p. 95, la régularisée de Moreau-Yosida de $L_{\mathcal{U}}$ est proche de $F_{\mathcal{U}}$, moyennant une translation. Ceci explique le théorème ci-dessous.

Théorème 6.8

Sous les hypothèses du Lemme 6.6, p. 92,

(i) si $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ existe, alors $\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)$ existe et est donné par

$$\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) = I_{\mathcal{U}} - (I_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}))^{-1} \tag{6.15}$$

où $I_{\mathcal{U}}$ représente l'identité dans $\mathcal{U}$.

(ii) Réciproquement, supposons que $\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)$ existe.

Si (4.11) = (4.12) *est vérifié, alors $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ existe et est donné par*

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) = (I_{\mathcal{U}} - \nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0))^{-1} - I_{\mathcal{U}} . \tag{6.16}$$

Si, de plus, $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ est défini positif (ce qui est le cas si f est fortement convexe), alors,

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) = (\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)^{-1} - I_{\mathcal{U}})^{-1} . \tag{6.17}$$

Preuve :

[(i)] Lorsque $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ existe, il découle de (4.15) et (6.11) que

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) = H L_{\mathcal{U}}(0) = H\phi_{\mathcal{V}}(0) . \tag{6.18}$$

En vue d'appliquer le Théorème 3.1 de [4] à la fonction $\phi_{\mathcal{V}}$ au point $\overline{g}_{\mathcal{U}}$, déterminons d'abord le point proximal de $\overline{g}_{\mathcal{U}}$. Utilisons pour cela le Théorème 6.5, p. 91, avec $f \equiv \phi_{\mathcal{V}}$, $p \equiv 0$ et $G \equiv \overline{g}_{\mathcal{U}}$. Les deux hypothèses $\partial\phi_{\mathcal{V}}(0) \neq \emptyset$ et $\overline{g}_{\mathcal{U}} \in \partial\phi_{\mathcal{V}}(0)$ sont vérifiées en vertu de (6.10); dès lors, le théorème nous assure que 0 est le point proximal de $\overline{g}_{\mathcal{U}}$. Par application du Théorème 3.1 de [4], nous obtenons alors

$$\nabla^2 \Phi_{\mathcal{V}}(\overline{g}_{\mathcal{U}}) = I_{\mathcal{U}} - (H\phi_{\mathcal{V}}(0) + I_{\mathcal{U}})^{-1} ,$$

ou encore, en vertu de la Proposition 6.7, p. 95, et de (6.18),

$$\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) = I_{\mathcal{U}} - (H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) + I_{\mathcal{U}})^{-1} ,$$

ce qui établit (6.15).

[(ii)] a) - Commençons par montrer que (4.11) = (4.12) est vérifié pour $\phi_{\mathcal{V}}$ en $0 \in \mathcal{U}$, c'est-à-dire que

$$\exists\, C > 0 \text{ , } \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tels que } \phi_{\mathcal{V}}(h) \leq \phi_{\mathcal{V}}(0) + \phi'_{\mathcal{V}}(0; h) + \tfrac{1}{2}\, C\, \|h\|^2_{\mathcal{U}} \text{ ,}$$
$$\forall\, h \in B_{\mathcal{U}}(0, \varepsilon) \text{ ,}$$

ou encore, puisque par (6.10)

$$\phi'_{\mathcal{V}}(0;h) = \langle \nabla\phi_{\mathcal{V}}(0), h\rangle_{\mathcal{U}} = \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} ,$$

$$\exists\ C > 0 \ ,\ \exists\ \varepsilon > 0 \text{ tels que } \phi_{\mathcal{V}}(h) \leq \phi_{\mathcal{V}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ C\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} \ ,\quad \forall\ h \in B_{\mathcal{U}}(0,\varepsilon) \ .$$

Or, en vertu de la Proposition 4.7 (ii), p. 59,

$$\exists\ \rho > 0 \ ,\ \exists\ R > 0 \text{ tels que } L_{\mathcal{U}}(h) \leq L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ R\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} \ ,\quad \forall\ h \in B_{\mathcal{U}}(0,\rho) \ .$$

Avec $\varepsilon = \rho$, nous avons alors, pour tout $h \in B_{\mathcal{U}}(0,\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{V}}(h) &= \phi_{\mathcal{V}}(h) - L_{\mathcal{U}}(h) + L_{\mathcal{U}}(h) \\ &\leq |\phi_{\mathcal{V}}(h) - L_{\mathcal{U}}(h)| + L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ R\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} \ , \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant (6.9) et (6.14),

$$\phi_{\mathcal{V}}(h) \leq \varepsilon\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} + \phi_{\mathcal{V}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ R\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} \ .$$

Choisissant C tel que $\varepsilon + \frac{1}{2}\ R = \frac{1}{2}\ C$, c'est-à-dire $C = 2\ \varepsilon + R$, nous avons alors

$$\phi_{\mathcal{V}}(h) \leq \phi_{\mathcal{V}}(0) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, h\rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{1}{2}\ C\ \|h\|^2_{\mathcal{U}} \ .$$

- Puisque $\nabla\phi_{\mathcal{V}}(0)$ existe, nous pouvons alors appliquer le Théorème 3.14 de [4] avec $f \equiv \phi_{\mathcal{V}}$, $x_0 \equiv \overline{g}_{\mathcal{U}}$ et $p(x_0) = 0$ et nous obtenons

$$\nabla^2\Phi_{\mathcal{V}}(\overline{g}_{\mathcal{U}}) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad H\phi_{\mathcal{V}}(0) \text{ existe,}$$

c'est-à-dire par la Proposition 6.7, p. 95, et (6.18),

$$\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) \text{ existe.} \tag{6.19}$$

Mais puisque, par hypothèse, $\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)$ existe, (6.19) nous assure donc de l'existence de $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ et par (6.15), nous avons

$$I_{\mathcal{U}} - \nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) = (I_{\mathcal{U}} + H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}))^{-1} \ ,$$

c'est-à-dire

$$H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) = (I_{\mathcal{U}} - \nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0))^{-1} - I_{\mathcal{U}}$$

et (6.16) est vérifié.

b) Supposons à présent que f est fortement convexe. Nous avons alors, en vertu de la Proposition IX 1.1.2 dans [2] par exemple,

$\exists\, c > 0$ tel que $\quad \forall\, (u, w) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$,

$$f(\overline{p} + u \oplus w) \;\geq\; f(\overline{p}) + \langle \overline{g}, u \oplus w \rangle + \tfrac{c}{2}\, \|u \oplus w\|^2 \,,$$

ou encore

$$\begin{aligned} f(\overline{p} + u \oplus w) \;&\geq\; f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} + \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w \rangle_{\mathcal{V}} + \tfrac{c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + \tfrac{c}{2}\, \|w\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &\geq\; f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} + \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w \rangle_{\mathcal{V}} + \tfrac{c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \,. \end{aligned}$$

Prenons $w \in W(u) \subseteq \mathcal{V}$ et soustrayons $\langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w \rangle_{\mathcal{V}}$ des deux membres de la dernière inégalité

$$f(\overline{p} + u \oplus w) - \langle \overline{g}_{\mathcal{V}}, w \rangle_{\mathcal{V}} \geq f(\overline{p}) + \langle \overline{g}_{\mathcal{U}}, u \rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \,,$$

ou encore, d'après (4.1) et les Théorèmes 4.1 (iii), p. 50, et 4.2 (ii), p. 52,

$$L_{\mathcal{U}}(u) \geq L_{\mathcal{U}}(0) + \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \,. \tag{6.20}$$

Or, l'inégalité (6.20) nous assure que $HL_{\mathcal{U}}(0)$ est défini positif.

En effet, pour u fixé dans $\mathcal{U}$ et pour tout λ non nul, nous avons

$$L_{\mathcal{U}}(\lambda\, u) = L_{\mathcal{U}}(0) + \lambda\, \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} + \tfrac{\lambda^2}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u + o(\lambda^2) \,,$$

ou encore

$$L_{\mathcal{U}}(\lambda\, u) - L_{\mathcal{U}}(0) - \lambda\, \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} = \tfrac{\lambda^2}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u + o(\lambda^2) \,. \tag{6.21}$$

Mais, par (6.20), nous avons

$$L_{\mathcal{U}}(\lambda\, u) - L_{\mathcal{U}}(0) - \lambda\, \langle \nabla L_{\mathcal{U}}(0), u \rangle_{\mathcal{U}} \geq \tfrac{\lambda^2\, c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \,. \tag{6.22}$$

Réunissant (6.21) et (6.22), nous obtenons

$$\tfrac{\lambda^2}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u \;\geq\; \tfrac{\lambda^2\, c}{2}\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + o(\lambda^2) \,,$$

ou encore

$$\tfrac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u \;\geq\; \tfrac{1}{2}\, c\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + \tfrac{o(\lambda^2)}{\lambda^2} \,.$$

Si nous choisissons λ tel que

$$\tfrac{1}{2}\, c\, \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + \tfrac{o(\lambda^2)}{\lambda^2} > 0 \,,$$

nous avons

$$\tfrac{1}{2}\, u^T\, HL_{\mathcal{U}}(0)\, u > 0\ ,$$

c'est-à-dire $HL_{\mathcal{U}}(0)$ défini positif.

Par conséquent, si f est fortement convexe, $HL_{\mathcal{U}}(0) = H_{\mathcal{U}}f(\overline{p})$ est défini positif et nous avons par (6.16),

$$H_{\mathcal{U}}f(\overline{p}) = (I_{\mathcal{U}} - \nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0))^{-1} - I_{\mathcal{U}}\ .$$

Appliquant le résultat d'algèbre linéaire (20) dans [4], nous avons alors

$$H_{\mathcal{U}}f(\overline{p}) = (\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)^{-1} - I_{\mathcal{U}})^{-1}$$

et (6.17) est vérifié. ∎

Remarques 6.9

1. Puisque $F_{\mathcal{U}}$ est la restriction de F à $\overline{x} + \mathcal{U}$, nous avons

$$F_{\mathcal{U}}(u) \quad = \quad F(\overline{x} + u \oplus 0)$$

et par conséquent,

$$\nabla F_{\mathcal{U}}(u) \quad = \quad \nabla_{\mathcal{U}} F(\overline{x} + u \oplus 0)$$

et

$$\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(u) \quad = \quad \nabla^2_{\mathcal{U}\mathcal{U}} F(\overline{x} + u \oplus 0)\ .$$

Dès lors,

$$\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) = \nabla^2_{\mathcal{U}\mathcal{U}} F(\overline{x})\ , \tag{6.23}$$

c'est-à-dire que le Hessien de $F_{\mathcal{U}}$ en 0 est le bloc $\mathcal{U}\mathcal{U}$ du Hessien de F en $\overline{x}$.

Il en résulte que, si (4.11) = (4.12) est vérifié et que $\nabla^2 F(\overline{x})$ existe, alors $\nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0)$ existe également et le Théorème 6.8, p. 97, nous assure alors de l'existence de $H_{\mathcal{U}}f(\overline{p})$.

2. Considérons l'application $x \mapsto p(x)$ et calculons son Jacobien en $\overline{x}$.

Puisque, d'après (6.3),

$$\nabla F(x) = I(x - p(x)) = x - p(x)\ ,$$

nous avons

$$\nabla p(\overline{x}) = I - \nabla^2 F(\overline{x}) = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^T & S \end{pmatrix} .$$

Or, en vertu de la Proposition 6.4, p. 90 et de la définition 3.2.3,

$$\operatorname{Im} \nabla p(\overline{x}) \subseteq \mathcal{U} .$$

Par conséquent, $Q^T = S = 0$ et nous obtenons

$$\nabla p(\overline{x}) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si f vérifie (4.11) = (4.12) en $\overline{p}$, alors, en utilisant (6.23) et (6.16), nous avons

$$\begin{aligned} P &= (I - \nabla^2 F(\overline{x}))_{\mathcal{U}\mathcal{U}} \\ &= I_{\mathcal{U}} - \nabla^2_{\mathcal{U}\mathcal{U}} F(\overline{x}) \\ &= I_{\mathcal{U}} - \nabla^2 F_{\mathcal{U}}(0) \\ &= (H_{\mathcal{U}} f(\overline{p}) + I_{\mathcal{U}})^{-1} , \end{aligned}$$

et, puisque $H_{\mathcal{U}} f(\overline{p})$ est défini positif, P l'est également.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés, dans ce mémoire, à l'étude du comportement au second ordre d'une fonction convexe f en un point $\overline{p}$ de non différentiabilité. Pour ce faire, nous avons d'abord défini le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ comme l'espace dans lequel la dérivée directionnelle $f'(\overline{p};\bullet)$ est linéaire, c'est-à-dire dans lequel f est différentiable en $\overline{p}$. Nous avons ensuite introduit la fonction $L_{\mathcal{U}}$, appelée $\mathcal{U}$-Lagrangien, dont nous avons étudié certaines propriétés. En particulier, remarquant que $L_{\mathcal{U}}$ coïncidait jusqu'au premier ordre avec f restreinte à $\overline{p}+\mathcal{U}$, nous avons utilisé le $\mathcal{U}$-Lagrangien pour définir un comportement de f au second ordre dans $\mathcal{U}$. Nous avons montré par après comment ce $\mathcal{U}$-Lagrangien se ramène au Lagrangien ordinaire dans le cas particulier d'une fonction de pénalité exacte et comment on peut l'utiliser pour construire un algorithme conceptuel de minimisation convergeant superlinéairement. Il pourrait d'ailleurs être intéressant, dans un mémoire ultérieur, de rendre cet algorithme implémentable en construisant par exemple des approximations convenables du sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ et des approximations quasi-Newton du $\mathcal{U}$-Hessien de f . Finalement, nous avons relié nos nouveaux objets avec la régularisée de Moreau-Yosida de f .

Bibliographie

[1] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, 1983.

[2] Hiriart-Urruty, J.-B. and Lemaréchal, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Nos. 305–306, Springer-Verlag, Berlin, 1993 (deux volumes).

[3] Lemaréchal, C. and Sagastizábal, C., *More than first-order developments of convex functions: primal-dual relations*, Journal of Convex Analysis 3 (1996), no. 2, 1–14.

[4] Lemaréchal, C. and Sagastizábal, C., *Practical aspects of the Moreau-Yosida regularization: theoretical preliminaries*, à paraître.

[5] Lemaréchal, C. and Sagastizábal, C., *The $\mathcal{U}$-Lagrangian of a convex function*, Transactions of the American Mathematical Society, à paraître.

[6] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

Table des Matières